Sammlung Göschen

Determinanten

Von

Prof. Paul B. Fischer

an der Oberrealschule zu Berlin-Lichterfelde

Zweite, verbesserte Auflage

Durchgesehener Neudruck



Berlin und Leipzig

Vereinigung wissenschaftlicher Verleger

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

1921

Druck von
C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig.
822621.

Inhaltsverzeichnis.

Literatur.

Jacobi, Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten (1841). Leipzig (1896). Ostwalds Klassiker, Nr. 77.

Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig (1857), 5. Aufl. (1881).

Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transformationen. Leipzig (1863 und 1877).

Hesse, Die Determinanten. Leipzig (1872).

Dölp, Die Determinanten. Darmstadt (1873), 7. Aufl. (1908).

Mansion, Elemente der Theorie der Determinanten. Paris (1883). Leipzig, 3. Aufl. (1899).

Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie. I. Bd. Determinanten. Leipzig (1885).

Pascal, Die Determinanten. Mailand (1897); Leipzig (1900). (Besonders als Nachschlagewerk für Literaturangaben zu benutzen.)

Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. Leipzig (1903).

Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig (1909). (Für weitere Studien sehr zu empfehlen!)

Netto, Die Determinanten. 9. Bd. der von E. Jahnke herausgeg. math.-phys. Schriften. Leipzig (1910). Vgl. außerdem von demselben Verfasser den Artikel über Determinanten im 1. Bd. der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

Eine wohl lückenlose Zusammenstellung aller Schriften über Determinanten bis zum Jahre 1919 gibt Thomas Muir in seinen sieben „Lists of Writings on Determinants", erschienen im Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics (London):

vol. 18	pp. 110—149,	up to 1880,
21	299—320,	1885,
36	171—267,	1900,
37	237—264,	1905,
43	343—378,	1910,
47	344—384,	1915,
49	51—73,	1919.

Die letzte Liste wird dem deutschen Leser besonders wertvoll sein, da er hier neben Nachträgen für die früheren Jahre einen Überblick über die neueste Weltliteratur erhält, der bisher wegen des Krieges nicht möglich zu erhalten war.

Vgl. außerdem die verschiedenen Schriften von demselben Verfasser über die Theorie der Determinanten in der Reihenfolge ihrer geschichtlichen Entwicklung in den:

Proceedings R. Soc. Edinburgh, Ostern 1906 in London als Buch erschienen.

I. Einleitung.

§ 1 Wie gelangte man zum Begriff der Determinanten?

Sollen die beiden Gleichungen ersten Grades:

(A) $5x - 3y = 21$ und $7x - 2y = 36$

nach x und y aufgelöst werden, so sucht man durch entsprechende Multiplikationen jede Gleichung so umzugestalten, daß bei der Addition der beiden Gleichungen einmal die eine der beiden Unbekannten, das andere Mal die andere Unbekannte wegfällt. In unserm Falle wird man, um y zu eliminieren, die erste Gleichung mit -2 und die zweite mit $+3$ multiplizieren, und um x wegzubringen, die erste mit -7 und die zweite mit $+5$. Rechnerisch drückt man dies folgenderweise aus:

$$\begin{array}{r|r|r} 5x - 3y = 21 & -2 & -7 \\ 7x - 2y = 36 & +3 & +5 \end{array}$$

$$11x = 66; \quad x = 6;$$

$$11y = 33; \quad y = 3.$$

Hat man drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten (x, y, z) nach diesen aufzulösen, so kann man in ähnlicher Weise die drei Gleichungen mit drei Unbekannten zurückführen auf zwei Gleichungen mit zwei

Unbekannten, deren Lösung dann keine Schwierigkeit mehr bereitet. Mit Hilfe der oben erklärten Schreibweise wird man unschwer das folgende Beispiel verstehen:

$$\text{(B)}\quad \begin{array}{r|c|c} a_1 x + b_1 y + c_1 z = m_1 & c_2 & \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = m_2 & -c_1 & c_3 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = m_3 & & -c_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c} (a_1 c_2 - a_2 c_1) x + (b_1 c_2 - b_2 c_1) y & \\ = (m_1 c_2 - m_2 c_1) & (b_2 c_3 - b_3 c_2) \\ (a_2 c_3 - a_3 c_2) x + (b_2 c_3 - b_3 c_2) y & \\ = (m_2 c_3 - m_3 c_2) & -(b_1 c_2 - b_2 c_1)\,. \end{array}$$

$$\{(a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_2 c_3 - b_3 c_2) - (a_2 c_3 - a_3 c_2)(b_1 c_2 - b_2 c_1)\} \cdot x$$
$$= (m_1 c_2 - m_2 c_1)(b_2 c_3 - b_3 c_2) - (m_2 c_3 - m_3 c_2)(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$x = \frac{\begin{array}{c} m_1 b_2 c_2 c_3 - \underline{m_2 b_2 c_1 c_3} - m_1 b_3 c_2^2 + m_2 b_3 c_1 c_2 \\ - m_2 b_1 c_2 c_3 + m_3 b_1 c_2^2 + \underline{m_2 b_2 c_1 c_3} - m_3 b_2 c_1 c_2 \end{array}}{\begin{array}{c} a_1 b_2 c_2 c_3 - \underline{a_2 b_2 c_1 c_3} - a_1 b_3 c_2^2 + a_2 b_3 c_1 c_2 \\ - a_2 b_1 c_2 c_3 + a_3 b_1 c_2^2 + \underline{a_2 b_2 c_1 c_3} - a_3 b_2 c_1 c_2 \end{array}}\,.$$

Läßt man die unterstrichenen Glieder weg und kürzt man mit c_2, so wird:

$$x = \frac{m_1 b_2 c_3 - m_1 b_3 c_2 + m_2 b_3 c_1 - m_2 b_1 c_3 + m_3 b_1 c_2 - m_3 b_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}\,.$$

In entsprechender Weise würde man finden:

$$y = \frac{a_1 m_2 c_3 - a_1 m_3 c_2 + a_2 m_3 c_1 - a_2 m_1 c_3 + a_3 m_1 c_2 - a_3 m_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}\,.$$

$$z = \frac{a_1 b_2 m_3 - a_1 b_3 m_2 + a_2 b_3 m_1 - a_2 b_1 m_3 + a_3 b_1 m_2 - a_3 b_2 m_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}\,.$$

Schließlich mag noch das Beispiel von vier linearen Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten angedeutet werden:

$$\text{(C)}\quad \begin{array}{r|c|c|c} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 w = m_1 & d_2 & & \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 w = m_2 & -d_1 & d_3 & \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 w = m_3 & & -d_2 & d_4 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 w = m_4 & & & -d_3\,. \end{array}$$

$$(a_1 d_2 - a_2 d_1) x + (b_1 d_2 - b_2 d_1) y + (c_1 d_2 - c_2 d_1) z = (m_1 d_2 - m_2 d_1),$$
$$(a_2 d_3 - a_3 d_2) x + (b_2 d_3 - b_3 d_2) y + (c_2 d_3 - c_3 d_2) z = (m_2 d_3 - m_3 d_2),$$
$$(a_3 d_4 - a_4 d_3) x + (b_3 d_4 - b_4 d_3) y + (c_3 d_4 - c_4 d_3) z = (m_3 d_4 - m_4 d_3).$$

Hiermit ist das Beispiel (C) auf (B) zurückgeführt. Bedenkt man, daß alle Größen a, b, c, m in (B) durch Ausdrücke von der Form $(\alpha\beta - \gamma\delta)$ ersetzt werden müssen, um in (C) die Rechnung zu beenden, so hat man eine Vorstellung von der weiteren Durchführung der Rechnung.

Aus den Beispielen (A, B, C) kann man ersehen, daß sich die Rechnung für ein System von fünf Gleichungen mit fünf Unbekannten bereits recht umständlich gestaltet, ja daß dieselbe schon für wenig mehr Unbekannte geradezu ans Unausführbare grenzt, falls die allgemeinen Buchstabengrößen nicht numerisch gegeben sind.

Recht unangenehm ist bei dem angegebenen Verfahren ferner, daß man in der Lösung einmal eine unnötig große Anzahl Glieder, dann aber einen überflüssigen Faktor erhält, der bei drei Unbekannten in der ersten Dimension auftritt, bei mehr Unbekannten jedoch von immer höherer Dimension wird; in (C) ist er bereits $(c_2 d_3 - c_3 d_2)$. Natürlich wird die Zurückführung der Lösungen auf die

einfachste Form, also der letzte Schritt des allgemeinen Verfahrens, durch diesen lästigen Faktor für eine größere Anzahl Gleichungen immer schwieriger.

Man sieht also, daß dieses allgemeine Lösungsverfahren die Rechnung durch einen Teil unnötiger Arbeit erschwert, der um so beträchtlicher wird, je größer die Anzahl der Gleichungen ist.

Diese Betrachtungen lassen erkennen, daß die Mathematiker sich bemühen mußten, einen Weg zu finden, durch den die umständliche, an unnötiger Arbeit reiche und zum größten Teil unausführbare Rechnung vermieden wurde.

Das Ergebnis dieser Forschungen konnte zu nichts anderem führen als zu den Determinanten, denn diese sind eben die von allen überflüssigen Faktoren freien, aus den gegebenen Größen der vorgelegten Gleichungen in einfachster Weise zusammengesetzten Ausdrücke für die Zähler und Nenner derjenigen Brüche, als welche sich die Werte der Unbekannten in den gegebenen Gleichungen darstellen.

Einen weiteren vorläufigen Einblick in die Bedeutung der Determinanten mögen die folgenden Betrachtungen geben.

§ 2. Historische Betrachtungen.

Gegen Ende des 17. Jahrhunderts suchte Leibniz die Auflösung von linearen Gleichungen nach den Unbekannten wegen der Unbrauchbarkeit des eben näher beleuchteten allgemeinen Lösungsverfahrens mit Hilfe einer besonderen Art kombinatorischer Aggregate zu lösen, die wir heute als Determinanten bezeichnen können. Schriftliche Aufzeichnungen darüber hat man in einem Briefe von Leibniz (1693) an seinen Freund Marquis de l'Hospital und in den „Acta Eruditorum" gefunden. Aus beiden Aufzeichnungen kann man entnehmen, daß sich Leibniz der Bedeutung seiner Erfindung wohl bewußt war, denn am Ende jenes Briefes steht: „Man sieht hier, auf was ich schon gelegentlich hingewiesen habe, daß die Vervollkommnung der Algebra von der Kombination abhängt."

Leider hat es Leibniz nicht verstanden, seine Erfindung für die Zukunft fruchtbar zu gestalten. Weder er selbst, noch andere kamen in der nächsten Zeit auf seine Gedanken zurück, und so geriet dieser erste Ansatz zu den Determinanten völlig in Vergessenheit. Der Grund dafür ist jedenfalls darin zu suchen, daß in jener Zeit die wichtigen Fragen über die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung im Vordergrund standen, welche kein rechtes Bedürfnis aufkommen ließen, die neuen Methoden von Leibniz zu benutzen.

Erst Dirichlet ist es gelungen, Leibniz als Erfinder der Determinanten zu erkennen. Bis dahin wurde allgemein Gabriel Cramer als solcher angesehen. Jedoch auch heute noch hat dieser Mathematiker wenigstens als Begründer dieser Lehre zu gelten, denn er hat 1750, völlig unabhängig von Leibniz, in einem seiner Werke die Determinanten allgemein definiert und bereits die Auflösung linearer Gleichungen mit ihrer Hilfe genau so beschrieben, wie sie heute die Determinantenlehre angibt. Allerdings waren Namen und Bezeichnungsweisen noch nicht so wie heutzutage.

Aber noch nahezu 100 Jahre sollte es dauern, ehe die Determinanten „Gemeingut der Mathematiker" wurden. Nur den Größten jener Zeit waren sie ein vertrautes Instrument; aber jeder von ihnen dehnte seine Untersuchungen in diesem Gebiet nur gerade so weit aus, als es ihm erforderlich erschien. Hervorzuheben sind hierbei die Namen: Bézout, Vandermonde, Laplace, Lagrange, Gauß,

Binet. Es würde natürlich zu weit führen, wollte man auf das Verdienst eines jeden eingehen.

Der erste, welcher um ihrer selbst willen die Determinanten eingehender behandelte, war Cauchy. Er brachte die elementare Determinantenlehre zum Abschluß; er hat auch die Bezeichnung „Determinante" eingeführt, und zwar nach gewissen Aggregaten, die Gauß Determinanten der quadratischen Form genannt hat. Später allerdings hat Cauchy den Namen Determinante wieder mit „fonction alternée" vertauscht, während Laplace den Namen Resultante gebrauchte, jedenfalls durch Bézouts Ausdruck „équation résultante" veranlaßt.

Carl Gustav Jacob Jacobi schließlich kommt das Verdienst zu, die Determinanten dem allgemeinen mathematischen Publikum zugänglich gemacht zu haben, oder, wie sich Kronecker ausdrückt, den Determinanten das Bürgerrecht erworben zu haben. Er hat die erste Cauchysche Bezeichnung Determinante wieder eingeführt und seitdem ist dieselbe ganz allgemein.

Jacobi hatte sich bereits seit 1826 mit dem Studium der Determinanten eingehend beschäftigt und ließ als Ergebnis seiner Forschungen 1841 die eingangs erwähnte Schrift „Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten" (De formatione et proprietatibus determinantium) erscheinen, die auch heute noch von außerordentlichem Wert ist.

Einen Überblick über die nach Jacobi folgende Entwicklung der Determinantenlehre gibt das angeführte Literaturverzeichnis. Daraus mag besonders das Kroneckersche Werk hervorgehoben werden. Kronecker ist nämlich der einzige Mathematiker, der einen ganz eigenen, aber gar nicht fernliegenden Weg einschlägt; er begründet die Determinantentheorie auf Untersuchungen

der linearen Gleichungen oder allgemein der linearen Funktionen mehrerer Variablen.

Am Schluß dieser historischen Entwicklung muß noch auf einen Punkt hingewiesen werden, der die Bedeutung der Determinanten von einer anderen Seite oeleuchtet und der zeigt, daß heutzutage die Stellung der Determinantentheorie in der Gesamtwissenschaft weit hinausgeht über den Zweck, der sie einst entstehen ließ.

Die Engländer (Cayley) haben versucht, bestimmte Eigenschaften, die für die Determinanten wesentlich sind, auch bei anderen Größen aufzufinden, und es ist ihnen geglückt, ein großes Gebiet gewisser abgebraischer Größen mit gemeinsamen charakteristischen Eigenschaften zu entdecken, von dem die Determinanten eine Unterabteilung bilden. Durch diese Verallgemeinerung wurde die Theorie der Invarianten (Sylvester) oder Hyperdeterminanten (Cayley) begründet, auf welche in diesem Buch nicht eingegangen werden kann.

Den Schluß dieser geschichtlichen Erörterungen mag ein Ausspruch Sylvesters bilden:

„Was ist im Grunde genommen die Theorie der Determinanten? Es ist eine über der Algebra stehende Algebra, ein Rechnungsverfahren, welches uns in den Stand setzt, die Resultate der algebraischen Operationen zu kombinieren und dieselben vorauszusagen, ähnlich wie wir uns mit Hilfe der Algebra der Ausführung der besonderen Operationen der Arithmetik entheben können!"

§ 3. Exkurs in das Gebiet der Kombinatorik.

Die Determinanten gehören in dem großen Reiche der Mathematik in das Gebiet der Kombinatorik. Hatte man sich im Anfang des 18. Jahrhunderts die glän-

zendsten Hoffnungen gerade für diesen Zweig der Mathematik gemacht, so weiß man heute, daß sich die Mathematiker jener Zeit in diesem Punkte getäuscht haben; nur der besondere Zweig der Determinanten hat sich in überraschender Weise entwickelt.

Da die Grundanschauungen der Kombinatorik in der Determinantentheorie eine wichtige Rolle spielen werden, mögen sie zur Erleichterung des Verständnisses für die kommenden Betrachtungen zuvor kurz erörtert werden.

Die Kombinatorik behandelt die Gesetze, nach denen eine gewisse Anzahl Elemente sich zusammenstellen lassen, oder nach denen aus gegebenen Elementen **Gruppen** oder **Komplexionen** gebildet werden können.

Dabei versteht man unter **Elementen** Einzeldinge, auf deren Beschaffenheit oder Zahlenwert es im allgemeinen nicht ankommt, deren „kombinatorischer Wert" in der Rangordnung des Elementes unter den anderen besteht; man deutet diese Rangordnung durch einen **Index** (Stellenzeiger, Ordnungszahl) am Element an, der also dem Element in der Reihenfolge aller Elemente einen festen Platz zuweist. Hiernach ist es begreiflich, daß man symbolisch eine Komplexion, z. B. die Reihenfolge der n Elemente:

$$a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n$$

durch die Indizes allein darstellen kann:

$$(1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \cdots\,,\ n)\,.$$

Eine bestimmte Anzahl (n) Elemente permutieren heißt, dieselben in alle möglichen Reihenfolgen (Anordnungen) bringen; irgend eine dieser verschiedenen Anordnungen nennt man eine **Permutation der betreffenden (n) Elemente.**

Die Hauptaufgabe besteht darin, die Gesamtzahl (P_n) aller möglichen Permutationen von einer bestimmten Anzahl (n) Elemente festzustellen.

Von n Elementen gibt es offenbar n mal so viele Permutationen, als es von $n-1$ Elementen gibt; denn zu dem ersten, zweiten, dritten, ... n-ten Element kann jede Permutation der $n-1$ übrigen Elemente gesetzt werden. Gibt es also zu $n-1$ Elementen eine bestimmte Anzahl Permutationen, die durch P_{n-1} bezeichnet sei, so muß es zu n Elementen n mal so viel, also $n \cdot P_{n-1}$ Permutationen geben. Nun können zwei Elemente a_1 und a_2 nur in den beiden Anordnungen $a_1 a_2$ und $a_2 a_1$ auftreten, das besagt $P_2 = 2$. P_3 findet man zu:

$$P_3 = 3 \cdot P_2 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!\,,$$

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!\,.$$

Also ist allgemein:

$$P_n = n \cdot (n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot\ \ldots\ \cdot n = n!\,.$$

Hat man z. B. die Permutationen von

$$1\quad 2\quad 3\quad 4$$

zu bilden, so schreibt man erst alle diejenigen hin, welche mit 1 beginnen, das heißt man schreibt zu 1 die Permutationen von 2, 3, 4:

1	2	3	4
1	2	4	3
1	4	2	3
1	4	3	2
1	3	4	2
1	3	2	4

Ebenso mag der Leser alle Permutationen hinschreiben, die 2, ferner die 3 und schließlich die 4 zuerst stehen haben.

Eine besondere Art von Komplexionen erhält man, wenn aus der Reihe der gegebenen n Elemente auf alle mögliche Weise je k herausgegriffen und permutiert werden. Diese Art Komplexionen heißen Variationen der n Elemente zur k-ten Klasse. Im besonderen gibt es n Variationen der n Elemente zur ersten Klasse, und es fallen andererseits die Variationen der n Elemente zur n-ten Klasse mit den Permutationen der n Elemente zusammen, während Variationen von n Elementen zur $(n+1)$-ten und zu höheren Klassen nicht gebildet werden können, ohne daß einzelne Elemente wiederkehren, was für die kommenden Betrachtungen ausgeschlossen werden soll.

Es gibt von n Elementen

$$V_k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

Variationen der k-ten Klasse.

Will man nämlich aus den Variationen der k-ten Klasse diejenigen der $(k+1)$-ten Klasse bilden, so muß man zu jeder Variation der k-ten Klasse je ein solches Element setzen, das sie noch nicht aufweist; das ist $(n-k)$ mal möglich. Somit erhält man $(n-k)$ mal soviel Variationen $(k+1)$-ter als k-ter Klasse. Oben wurde erwähnt, daß es n Variationen erster Klasse gibt; daraus folgt, daß es $n(n-1)$ Variationen zweiter Klasse, $n(n-1)(n-2)$ dritter Klasse, allgemein, daß es $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ k-ter Klasse gibt.

Alle Variationen der k-ten Klasse können derart in Gruppen geteilt werden, daß die Komplexionen in jeder Gruppe Permutationen derselben k Elemente sind. Kommt

es nun lediglich darauf an, die Anzahl dieser Gruppen festzustellen, so nennt man die einzelnen Gruppen Kombinationen der n Elemente zur k-ten Klasse. Es gehören zu jeder Gruppe $k!$ Variationen, woraus folgt, daß die Zahl der Kombinationen zur k-ten Klasse nur den $k!$-ten Teil der Anzahl der Variationen zur k-ten Klasse beträgt:

$$K_k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot k} = \binom{n}{k}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot k}$$

$$\cdot\frac{(n-k)(n-k-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(k+1)}{(k+1)(k+2)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-k)} = \binom{n}{n-k}.$$

Mit Hilfe dieser Überlegung kann man den obigen Ausdruck für V_k jetzt auch schreiben:

$$V_k = \binom{n}{k}\cdot k!$$

Während bisher die allgemeinen Grundaufgaben über die Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Komplexionen von n Elementen behandelt wurden, sollen jetzt die einzelnen Permutationen betrachtet werden, im besonderen wie man von einer zur anderen gelangt.

Diejenige Permutation, welche durch die Aufeinanderfolge der Indizes in der natürlichen Zahlenreihe ausgezeichnet ist, mag als Grundpermutation bezeichnet werden. In dieser ist jedes vorausgehende Element von neiderer Ordnung als das folgende. Nimmt man mit der Grundpermutation $(1, 2, \ldots, n)$ irgend eine Veränderung der Anordnung der Elemente vor, so sagt man, zwei Elemente bilden in der neuen Permutation eine Inversion (dérangement, Fehlstand, Versetzung), wenn

sie in der umgekehrten Ordnung wie in der Grundpermutation aufeinander folgen, oder wenn von den beiden Elementen dasjenige niederer Ordnung dem höherer Ordnung nachsteht.

Irgend eine Permutation wird bezüglich der Grundpermutation eine ganz bestimmte Anzahl Inversionen bilden. Man findet diese Anzahl, wenn man jedes Element mit allen vorhergehenden vergleicht und abzählt, wievielmal ein Element niederer Ordnung einem solchen höherer Ordnung nachsteht. So enthält die Permutation (2, 5, 4, 1, 3) die Inversionen: (2, 1), (5, 4), (5, 1), (5, 3), (4, 1), (4, 3), also im ganzen sechs.

Die Permutation $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$ weist die größtmögliche Anzahl Inversionen auf $\left(\text{nämlich } \frac{n}{2}(n-1\right)$, weil jedes folgende Element von niederer Ordnung ist als das vorhergehende.

Bei größeren Komplexionen kann man die Abzählung der Inversionen erleichtern, falls man die betreffende Komplexion in zwei beliebige Gruppen spaltet. Die gesuchte Anzahl ist dann gleich der Summe der Inversionen der ersten Gruppe und der der zweiten Gruppe, die sich beide nach Obigem leicht finden lassen, vermehrt um die Anzahl der Inversionen, welche die Elemente der ersten Gruppe mit denen der zweiten bilden. Bei Bestimmung der letzten Anzahl kommt es nicht darauf an, wie die Elemente in den Gruppen selbst angeordnet sind. Es seien daher von den n überhaupt vorliegenden Elementen m in der ersten Gruppe, also $(n-m)$ in der zweiten Gruppe; die ersteren haben folgende der Größe nach geordnete Indizes:

$$i_1, i_2, \ldots, i_r, \ldots, i_{m-1}, i_m.$$

Es kann nun z. B. i_r nur mit kleineren Zahlen Inversionen bilden; solche sind im ganzen $(i_r - 1)$ vorhanden, wovon jedoch diejenigen abzuziehen sind, welche in der ersten Gruppe vorkommen, also $(r-1)$. Hiernach kann i_r mit den Indizes der zweiten Gruppe nur $i_r - r$ Inversionen bilden. Eine solche Zahl kommt aber jedem Element in der ersten Gruppe zu, so daß folgende Summe die gesuchte Zahl angibt:

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \ldots + (i_r - r) + \ldots + (i_m - m)$$
$$= i_1 + i_2 + \ldots + i_r + \ldots + i_m - (1 + 2 + \ldots + r + \ldots + m)$$
$$= i_1 + i_2 + \ldots + i_m - \frac{m}{2}(m+1).$$

Sämtliche $n!$ Permutationen von n Elementen werden in zwei Klassen eingeteilt; je nachdem irgendeine Permutation bezüglich der Grundpermutation eine gerade oder ungerade Anzahl Inversionen aufweist, gehört sie in die gerade (erste, positive) oder in die ungerade (zweite, negative) Klasse.

Vertauscht man in einer Permutation zwei beliebige Elemente, oder führt man, wie man sich ausdrückt, eine „Transposition" aus, so ändert sich die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Anzahl, mit anderen Worten, so ändert die Permutation ihre Klasse. Dies erklärt sich daraus, daß man die Vertauschung zweier beliebiger Elemente stets auf eine ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Nachbarelemente zurückführen kann, was durch folgendes Beispiel erläutert werden mag. Um von (1, 2, 3, 4, 5, 6) auf (1, 6, 3, 4, 5, 2) zu gelangen, müssen die sieben Nachbarvertauschungen der Reihe nach ausgeführt werden: (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), wobei jeder einzelnen Ver-

tauschung eine Änderung der Inversionszahl von 1 entspricht.

Überhaupt kann durch Vertauschung benachbarter Elemente nach und nach jede beliebige Permutation aus der Grundpermutation abgeleitet werden, woraus wieder folgt, daß jede Permutation aus jeder anderen durch Vertauschung benachbarter Elemente abgeleitet werden kann.

Allgemein bezeichnet man die Operation des Übergangs von einer Permutation der gegebenen Elemente zu einer anderen Permutation derselben Elemente als Substitution. Als einfachste Substitution dürfte demnach die Transposition benachbarter Elemente zu bezeichnen sein. Mit Hilfe dieses neuen Begriffes verstehen sich die folgenden Sätze von selbst:

Jede Substitution ist in Transpositionen zerlegbar.

Irgend eine Permutation behält bei Ausführung einer beliebigen Substitution ihre Klasse bei oder wechselt dieselbe, je nachdem die Substitution sich in eine gerade oder ungerade Anzahl von Transpositionen zerlegen läßt.

Die Anzahl der Permutationen der ersten Klasse ist ebenso groß als die der zweiten Klasse.

Letzteres erklärt sich daraus, daß die Anzahl aller Permutationen ($n!$) gerade ist, und daß bei der Entstehung aller Permutationen aus der Grundpermutation einmal eine der ersten Art, dann wieder eine der zweiten Art entsteht.

Ebenso erklärt sich von selbst:

Zwei Permutationen gehören zu derselben Klasse, wenn sich die eine aus der anderen durch eine gerade Anzahl von Transpositionen gewinnen läßt, oder wenn beide je durch eine gerade oder je durch eine ungerade Anzahl von Transpositionen aus derselben dritten sich ableiten lassen.

Hervorgehoben werden müssen schließlich noch die zyklischen Vertauschungen, denn eine Substitution kann auch dadurch ausgeführt werden, daß jedes Element durch das folgende und das letzte wieder durch das erste ersetzt wird, oder daß jedes Element durch das vorhergehende und das erste durch das letzte ersetzt wird.

Findet eine zyklische Vertauschung aller Elemente statt, so weist die Substitution eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen auf, je nachdem die Anzahl der Elemente ungerade oder gerade ist, da sich immer eine zyklische Vertauschung von n Elementen durch $(n-1)$ Transpositionen ersetzen läßt, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$
\begin{array}{ll}
1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6; & \\
 & (12) \\
2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6; & \\
 & (13) \\
2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6; & \\
 & (14) \\
2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 5,\ 6; & \\
 & (15) \\
2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 1,\ 6; & \\
 & (16) \\
2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 1. &
\end{array}
$$

Es läßt sich aber auch jede beliebige Substitution auf zyklische Vertauschungen einzelner Gruppen zurückführen; hierfür ein Beispiel:

Soll die Permutation:

$$P_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8)$$

übergeführt werden in:

$$P_2 = (3,\ 6,\ 4,\ 1,\ 7,\ 2,\ 8,\ 5),$$

so ersetze man in P_1 irgend ein Element, z. B. 3, durch dasjenige, welches in P_2 an dieser Stelle steht, also durch 4. Darauf lasse man an die Stelle, wo 4 in P_1 steht, dasjenige rücken, das in P_2 an der Stelle von 4 in

P_1 steht, also 1. An Stelle von 1 in P_1 kommt dann 3 und dann wieder 4 an Stelle von 3. Damit ist ein Zyklus (3, 4, 1) erkennbar. Darauf verfährt man genau so mit einem neuen Element, bis man wieder einen Zyklus erkennt usw. In dem angeführten Beispiel wird leicht noch der Zykel, wie man sich auch ausdrückt, (2, 6) und ebenfalls (7, 8, 5) erkannt.

Eine Substitution ist weiterhin gerade oder ungerade, je nachdem die Differenz der Elementenanzahl der Permutation und der Anzahl der Gruppen von Zykeln gerade oder ungerade ist. Da nämlich ein Zyklus von m Elementen durch $(m-1)$ Transpositionen ersetzbar ist, so hat man bei r Gruppen von Zykeln $m_1 - 1 + m_2 - 1 + \dots + m_r - 1 = n - r$ Transpositionen, deren Anzahl sofort die eine oder andere Gruppe erkennen läßt.

§ 4. Bezeichnungsweise durch doppelte Indizes.

„Es ist in der Algebra und in der Analysis keineswegs gleichgültig, welche Bezeichnungen man für diejenigen Größen wählt, mit welchen man operieren will. Sie sollen die Größen irgendwie charakterisieren. Auch in der Bezeichnung der Operationen, welche mit den gegebenen Größen vorgenommen werden sollen, macht sich eine große Kunst bemerkbar, die wir von unseren Vorfahren ererbt und dann weitergebildet haben. Es ist gewiß nicht zu viel gesagt, wenn man behauptet, daß die Lösung einer großen Zahl von Problemen einzig und allein von der geeigneten Wahl der Bezeichnungen abhängt.“

Dieser Ausspruch rührt von O. Hesse her; man erkennt danach, weshalb in § 1 die gegebenen Größen der linearen Gleichungen nicht willkürlich bezeichnet wurden.

Hätte man z. B. die drei linearen Gleichungen in folgender Weise bezeichnet:

$$ax + by + cz = d\,,$$
$$ex + fy + gz = h\,,$$
$$ix + ky + lz = m\,,$$

so würde sich die Rechnung keineswegs so übersichtlich gestaltet haben. Dies gilt natürlich erst recht von noch mehr Gleichungen, denn da steigern sich die Schwierigkeiten bei ungeeigneter Bezeichnung ganz beträchtlich.

Die Übersichtlichkeit der Bezeichnung in § 1 besteht nun darin, daß der Index des Koeffizienten die Gleichung angibt, während der Buchstabe die Stellung der Konstanten in der Gleichung bezeichnet; so ist z. B. b_3 der Koeffizient von y in der dritten Gleichung, da die b immer Koeffizienten von y sind, während die a solche von x sind usw.

Aber diese Bezeichnungsweise hat doch ihre Mängel, falls mehr als drei Unbekannte mit den dazugehörigen Gleichungen vorhanden sind; bald muß eine Unsymmetrie in der Bezeichnung eintreten, da die Anzahl der Buchstaben eine beschränkte ist und man nicht jede beliebige Anzahl von Gleichungen in dieser Weise bezeichnen kann. Außerdem ist man mit der Reihenfolge der Buchstaben doch keineswegs so vertraut wie mit der natürlichen Zahlenreihe.

Wurde oben bereits die Reihenfolge der Gleichungen durch Zahlen (Indizes) charakterisiert, so wollen wir noch einen Schritt weitergehen und nicht nur die Gleichungen zählen, sondern auch die Unbekannten. Man läßt dabei den Buchstaben x für die Unbekannten übrig, die dann z. B. heißen $x_1, x_2, \dots, x_n$; aber auch die Koeffizienten der Unbekannten werden alle durch einen Buchstaben

ausgedrückt, meistens durch a, und zwar derart, daß ein erster Index an a angeben soll, in welcher Gleichung derselbe als Koeffizient vorkommt, und daß ein zweiter danebenstehender Index die Unbekannte markiert, deren Koeffizient er ist. Demzufolge wird a_{47} den Koeffizienten in der vierten Gleichung von x_7 darstellen und a_{nn} den in der n-ten Gleichung von x_n, falls n lineare Gleichungen mit n Unbekannten vorliegen.

Zur weiteren Erläuterung dieser Bezeichnungsweise, die zuerst von Leibniz angewendet wurde (er schrieb allerdings nur die Indizes hin und hob immer wieder hervor, daß es keine Zahlen seien), die aber schon früher die Araber gekannt haben sollen, mag das S. 6 durchgeführte Beispiel (B) in der neuen Schreibweise zum Teil angegeben werden:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = m_1 ,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = m_2 ,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = m_3 ,$$

$$x_1 = \frac{\begin{matrix} m_1 a_{22} a_{33} - m_1 a_{32} a_{23} + m_2 a_{32} a_{13} \\ - m_2 a_{12} a_{33} + m_3 a_{12} a_{23} - m_3 a_{22} a_{13} \end{matrix}}{\begin{matrix} a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} + a_{21} a_{32} a_{13} \\ - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} \end{matrix}} .$$

(Einige ältere Mathematiker, wie Jacobi und Hesse, setzen den zweiten Index zur besseren Unterscheidung rechts oben an den Buchstaben, wobei natürlich stets zu beachten ist, daß man es nicht mit Potenzen zu tun hat. Dem Produkt $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$ würde da entsprechen $a_1^1\,a_2^2\,a_3^3$.)

Schreibt man die Koeffizienten a in den obigen drei Gleichungen für sich allein und behält ihre dortige gegen seitige Anordnung bei, so ergibt sich folgendes quadratisches Schema, das wir kurz eine Matrix nennen wollen:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} . \end{matrix}$$

Die Größen a (fernerhin auch Elemente genannt!) sind hier in horizontale und vertikale Parallelreihen gebracht und zwar derart, daß die Stellung jedes Elementes durch seine beiden Indizes bedingt ist. Zählen wir die Horizontalreihen oder Zeilen von oben nach unten und die Vertikalreihen oder Kolonnen (auch Spalten genannt) von links nach rechts, so gibt der erste Index am Element stets die Zeile und der zweite die Kolonne an. Von den Elementen a_{11}, a_{22}, a_{33} sagen wir, sie bilden die Hauptdiagonale und a_{13}, a_{22}, a_{31} die Nebendiagonale.

Entsprechendes gilt von der Matrix der n^2 Elemente:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} . \end{matrix}$$

Schließlich wäre noch zu erwähnen, daß man $m \cdot n$ Elemente in einem rechteckigen Schema anordnen kann:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} , \end{matrix}$$

das n Kolonnen und m Zeilen aufweist; eine solche Anordnung wollen wir zum Unterschied von der eben besprochenen quadratischen Matrix eine rechteckige Matrix nennen.

II. Theorie der Determinanten.

§ 5. Definition der Determinanten.

Wir wenden uns folgender Aufgabe zu:
Aus den Elementen der quadratischen Matrix:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$

sollen alle möglichen Produkte aus je drei Elementen in der Weise gebildet werden, daß von jeder Zeile und von jeder Kolonne jedesmal nur ein Element genommen wird.

Man erkennt bald, daß jedes Produkt die Form $a \cdot b \cdot c$ haben muß, da eben von jeder Kolonne in jedem Produkt ein Element enthalten sein soll. Aber auch alle drei Indizes $1, 2, 3$ müssen in jedem Produkt vorkommen, da von jeder Zeile jedesmal ein Element zur Stelle sein muß. Es wird also so viele Produkte abc geben, als die Indizes $1, 2, 3$ an den Elementen a, b, c vertauscht werden können, oder mit anderen Worten, als die Anordnung $1, 2, 3$ der Indizes permutiert werden kann. Das führt aber auf eine schon erledigte Aufgabe zurück.

Da es von den drei Ziffern $1, 2, 3$ die sechs Permutationen gibt:

$$1, 2, 3; \quad 1, 3, 2; \quad 2, 3, 1; \quad 2, 1, 3; \quad 3, 1, 2; \quad 3, 2, 1;$$

erhalten wir die sechs Produkte:

$$a_1 b_2 c_3, \quad a_1 b_3 c_2, \quad a_2 b_3 c_1, \quad a_2 b_1 c_3, \quad a_3 b_1 c_2, \quad a_3 b_2 c_1.$$

Zu demselben Ergebnis wären wir auch gelangt, wenn wir gefordert hätten, daß jedesmal die Indizesanordnung $1, 2, 3$ vorkommen soll, dagegen alle möglichen Anordnungen der Buchstaben a, b, c:

$$a_1 b_2 c_3, \quad a_1 c_2 b_3, \quad b_1 c_2 a_3, \quad b_1 a_2 c_3, \quad c_1 a_2 b_3, \quad c_1 b_2 a_3.$$

Dies sind genau dieselben Produkte wie oben.

Die Aufgabe werde jetzt dahin erweitert, daß jedes Produkt das $+$ oder das $-$ Zeichen erhalten soll, je nachdem bei unveränderter Buchstabenanordnung abc die Indizespermutation $1, 2, 3$ zur geraden oder ungeraden Klasse (vgl. S. 17) gehört; analoges soll gelten für die Buchstabenpermutationen bei unveränderter Indizesanordnung.

Hiernach erhalten die Produkte die Vorzeichen:

$$+a_1 b_2 c_3, \quad -a_1 b_3 c_2, \quad +a_2 b_3 c_1, \quad -a_2 b_1 c_3, \quad +a_3 b_1 c_2, \quad -a_3 b_2 c_1,$$

oder:

$$+a_1 b_2 c_3, \quad -a_1 c_2 b_3, \quad +b_1 c_2 a_3, \quad -b_1 a_2 c_3, \quad +c_1 a_2 b_3, \quad -c_1 b_2 a_3.$$

Auch unter Berücksichtigung der Vorzeichen führt also die zweite Bildungsmöglichkeit zu denselben Produkten wie die erste.

Die Summe dieser sechs Produkte unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen nennt man die **Determinante** der Matrix:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 . \end{matrix}$$

Man erkennt, daß eine andere Anordnung derselben neun Elemente, also eine andere Matrix im allgemeinen zu einer anderen Determinante führen wird. Es kann also nicht ohne weiteres von der Determinante von neun

Elementen gesprochen werden, sondern erst, wenn sie in einer bestimmten Matrix angeordnet sind.

Will man ausdrücken, daß von neun in einer quadratischen Matrix angeordneten Elementen die Determinante gebildet werden soll, so setzt man diese Matrix zwischen zwei vertikale Striche und hat also in unserem Falle:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$
$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + b_1 c_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 .$$

Für die Entwicklung dieser Determinante hat Sarrus eine Regel angegeben, die aus folgendem Schema ersichtlich ist:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right. .$$

Die Produkte aus den Elementen parallel der Hauptdiagonale (durch einfache Striche verbunden) geben die positiven und die parallel der Nebendiagonale (durch Doppelstriche verbunden) die negativen Glieder der Determinante:

$$a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 .$$

Man schreibt also die beiden ersten Kolonnen noch einmal hinter die dritte; so findet man z. B.:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -46 \quad \text{aus} \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right.$$

$$D = 3 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot 8 + 3 \cdot 2 \cdot 0 - 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 12 + 40 - 96 - 2 = -46 .$$

Bei einiger Übung gelingt es einem bald, sich die beiden Kolonnen hinzuzudenken und sofort die Entwicklung hinzuschreiben:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = b c^2 + a b^2 + a^2 c - a^2 b - b^2 c - a c^2$$
$$= b c(c - b) + a b(b - a) + a c(a - c) .$$

Man versuche jetzt, die Zähler und Nenner der Ergebnisse für x, y, z (S. 6 u. 22) in Determinantenform zu schreiben.

Liegt die erste quadratische Matrix von S. 23 zur Bildung der Determinante vor, so erkennt man bald: es kommt die Permutation der obigen Ziffern 1, 2, 3 jetzt derjenigen der ersten Indizes gleich, während die frühere Permutation der Buchstaben jetzt derjenigen der zweiten Indizes gleichkommt. Man geht am besten aus von dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonale $a_{11} a_{22} a_{33}$, dem Hauptglied, und erhält beide Male dasselbe:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$
$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} .$$

Um diese Entwicklung aus dem Hauptglied anzudeuten, schreibt man hierfür auch:

$$\sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} .$$

Die bisherigen Determinanten wurden entwickelt aus einer quadratischen Matrix von $3 \cdot 3$ Elementen; dementsprechend nennt man sie dreireihige oder dreigliedrige Determinanten, auch Determinanten dritter Ordnung oder dritten Grades.

Eine quadratische Matrix von nur $2 \cdot 2$ Elementen würde zu zweigliedrigen Determinanten führen:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c\,, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

deren Bildung aus der Matrix wohl keiner Erläuterung bedarf.

Schreibt man die Entwicklung der letzten dreireihigen Determinante derart, daß man aus je zwei Gliedern Elemente derselben Parallelreihe ausklammert, z. B.:

$$a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) + a_{12}(a_{23}\,a_{31} - a_{21}\,a_{33}) + a_{13}(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31})\,,$$

so erkennt man leicht, daß die Klammern wieder als Determinanten geschrieben werden können:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Nebenbei sei auch bemerkt, daß man unter der eingliedrigen Determinante $|a|$ die Größe a selbst zu verstehen hätte.

Das bisher Gesagte gibt uns ohne weiteres das Bildungsgesetz für eine viergliedrige Determinante:

$$D_{(4)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

es gilt die $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Permutationen von 1, 2, 3, 4 hinzuschreiben und festzustellen, ob die einzelnen Permutationen bezüglich der Grundpermutation 1, 2, 3, 4 zur geraden oder ungeraden Klasse gehören. Dann ergibt sich:

$$D_{(4)} = \sum \pm\, a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \\
&- a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} \\
&+ a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \\
&- a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} \\
&+ a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\
&- a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}\,.
\end{aligned}$$

Die hier vorkommenden Anordnungen der zweiten Indizes enthalten zugleich die S. 13 nur angedeuteten 24 Permutationen von (1, 2, 3, 4).

Zur weiteren Übung mag sich der Leser aus je sechs Gliedern Elemente derselben Parallelreihe (z. B. der ersten Zeile) ausklammern und die Klammern wieder als Determinanten zu schreiben versuchen. Es liegt darin schon eine Andeutung, wie man Determinanten durch solche niederer Ordnung ausdrücken kann.

Führt man die bisherigen Untersuchungen allgemein für eine quadratische Matrix von n^2 Elementen durch, so kann folgendes

Bildungsgesetz der Determinante n-ter Ordnung

aufgestellt werden:

Die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

wird dadurch gebildet, daß in dem Hauptglied $a_{11}\,a_{22}\ldots a_{nn}$ die ersten oder die zweiten Indizes auf alle möglichen Arten permutiert werden.

Jedem der so entstandenen Produkte wird das positive oder das negative Vorzeichen gegeben, je nachdem die zugehörige Permutation der Indizes zur selben Permutationsklasse gehört wie $(1, 2, \ldots, n)$ oder nicht. Die Summe aller dieser Glieder ist die obige Determinante D.

In historischer Beziehung ist noch hervorzuheben, daß diese Schreibart einer Determinante, die quadratische Matrix zwischen zwei vertikale Striche gesetzt, herrührt von Cayley, während die andere auch schon mehrfach erwähnte Summendarstellung:

$$\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

von Cauchy und Jacobi gebraucht wurde. In älteren Werken findet man noch die Vandermondesche Darstellung:

$$\frac{1 \mid 2 \mid 3 \mid \ldots \mid n-1 \mid n}{1 \mid 2 \mid 3 \mid \ldots \mid n-1 \mid n}.$$

Anstatt der ganzen Matrix wird oft nur die erste Zeile zwischen zwei vertikale Striche gesetzt. Noch einen Schritt weiter geht Kronecker, der nur das Element der i-ten Zeile und der k-ten Kolonne zwischen zwei Striche setzt, allerdings mit dem Vermerk, daß i und k alle Werte von 1 bis n zu durchlaufen haben, also:

$$|a_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Am Schluß des vorigen Paragraphen wurde auch die rechteckige Matrix erwähnt. Es interessiert bisweilen, wie viele n-gliedrige Determinanten bei der Annahme $m > n$ in einer rechteckigen Matrix von $m \cdot n$ Elementen enthalten sind. Z. B. lassen sich aus der Matrix:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \end{matrix}$$

so viele zweigliedrige Determinanten bilden, als man je zwei Kolonnen herausgreifen kann, also die $\binom{4}{2} = 6$ verschiedenen Determinanten:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_1' & x_3' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ x_1' & x_4' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_2' & x_3' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ x_3' & x_4' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ x_4' & x_2' \end{vmatrix}.$$

Nebenbei bemerkt sind dies die sechs homogenen Linienkoordinaten p_{ik} einer Geraden, die durch die homogenen Punktkoordinaten zweier Punkte x und x' im Raum bestimmt sind*).

Allgemein lassen sich aus der rechteckigen Matrix von $m \cdot n$ Elementen $\binom{m}{n}$ n-reihige Determinanten bilden, falls $m > n$ ist.

§ 6. Hauptsätze der Determinanten mit einigen Folgerungen.

Aus der doppelten Bildungsweise der Determinanten (Permutation der ersten oder der zweiten Indizes!) geht hervor, daß in der Entwicklung die ersten Indizes mit den zweiten vertauscht werden können. Die ersten Indizes charakterisieren die Zeilen und die zweiten die Kolonnen. Demnach bedeutet die eben erwähnte Vertauschbarkeit der ersten Indizes mit den zweiten nichts anderes als die Möglichkeit, in einer Determinante die Kolonnen mit den Zeilen vertauschen zu können. Diese Überlegung führt zu dem

1. Satz. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn die Zeilen als Kolonnen und die Kolonnen als Zeilen geschrieben werden.

---

*) Vgl. Samml. Göschen Bd. 507 (Koordinatensysteme), S. 113.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = a b' - a' b ,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} ,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

In den angeführten Determinanten*) sind die Hauptdiagonalen erhalten geblieben; dementsprechend hat man diese Umänderung einer Determinante als „Umklappen um die Hauptdiagonale“, auch als „Stürzen“ bezeichnet.

Nach dem Bildungsgesetz ist aus irgendeiner Parallelreihe in jedem Produkt der Entwicklung stets ein Element vorhanden. Hieraus erklärt sich der

2. Satz. Eine Determinante ist ihrem Werte nach Null, falls die Elemente einer Parallelreihe alle verschwinden.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

*) Bezüglich and. Beisp., auch zu den folg. Sätzen, vergl. „Nied. Analysis“ v. Sporer, Sammlung Göschen Bd. 53.

Wird in jeder der $n!$ Permutationen, welche die $n!$ Glieder der Determinante charakterisieren, eine bestimmte Zahl (Index) mit einer anderen ebenfalls bestimmten Zahl, also z. B. überall 5 mit 7, vertauscht, so können sich die $n!$ Permutationen in ihrer Gesamtheit nicht geändert haben, während jede einzelne Permutation die Klasse gewechselt haben muß (vgl. S. 17). Einer Vertauschung zweier Zahlen kommt bei der Determinante eine Vertauschung zweier Parallelreihen gleich, und dem Klassenwechsel jeder Permutation entspricht ein Zeichenwechsel jedes Gliedes in der Entwicklung der Determinante. Daraus folgt der

3. Satz. Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, sobald man zwei ihrer Parallelreihen vertauscht. (Vandermonde, Laplace.)

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11 \qquad \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11 ,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} ,$$

$$\sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55} = - \sum \pm a_{11} a_{22} a_{35} a_{44} a_{53} .$$

Werden die Zeilen (Kolonnen) beliebig untereinander vertauscht, wird also die Permutation der Zeilen (Kolonnen) geändert, so tritt bei jedem Glied der Entwicklung eine entsprechende Änderung in der Reihenfolge der Indizes ein. Gehört die neue Permutation zur selben Klasse wie die alte, so tritt kein Zeichenwechsel ein, aber wohl im anderen Fall. Das besagt der

4. Satz. Eine Determinante behält ihr Vorzeichen oder ändert es, falls die Zeilen (Kolonnen) untereinander permutiert werden, je nachdem

die neue Permutation bezüglich der Zeilenfolge zur selben Klasse als die alte gehört oder nicht.

Hieraus folgt z. B., daß die Determinante n-ter Ordnung mit $(-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}$ multipliziert werden muß, sobald die Reihenfolge der Zeilen (Kolonnen) umgekehrt hingeschrieben wird. Ein anderes Beispiel ist:

$$\sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55} = \sum \pm a_{21} a_{52} a_{13} a_{34} a_{45},$$

wo (1 2 3 4 5) und (2 5 1 3 4) zur selben Klasse gehören.

Eine weitere Folgerung aus (4) ist der

5. Satz. Eine Determinante ist mit $(-1)^{m-1}$ zu multiplizieren, sobald m Parallelreihen zyklisch vertauscht werden.

Stimmen zwei Parallelreihen einer Determinante D in den entsprechenden Elementen überein, so geht bei Vertauschung dieser beiden Reihen nach (3) D über in $-D$. Andererseits kann sich aber D nicht ändern, da die beiden Parallelreihen identisch waren; es müßte also sein:

$$D = -D,$$

was nur für $D = 0$ möglich ist. Also ergibt sich der

6. Satz. Eine Determinante ist ihrem Werte nach Null, sobald zwei Parallelreihen übereinstimmen. (Vandermonde, Laplace.)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & k & l & m \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} 7 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Die folgenden beiden Sätze sind nur andere Ausdrucksformen für (6):

(6A) Eine Determinante verschwindet, sobald man die Elemente einer Parallelreihe durch die entsprechenden einer anderen ersetzt.

(6B) Eine Determinante verschwindet, sobald man in einer Zeile (Kolonne) den ersten (zweiten) Index durch den einer anderen Zeile (Kolonne) ersetzt.

Eine weitere wichtige Eigenschaft drückt aus der

7. Satz. Multipliziert man alle Elemente einer Parallelreihe mit ein und derselben Zahl p, so wird der Wert der Determinante mit p multipliziert.

Es folgt dies aus der schon oben erwähnten Eigenschaft der Determinante, daß jedes Glied der Entwicklung eines der mit p multiplizierten Elemente enthält.

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 15 \end{vmatrix} = 3\,(15 - 14) = 3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 21 & 15 \end{vmatrix} = 45 - 42,$$

$$\frac{1}{p} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \frac{c_1}{p} \\ a_2 & b_2 & \frac{c_2}{p} \\ a_3 & b_3 & \frac{c_3}{p} \end{vmatrix}.$$

Gilt das eben Erwähnte von allen Parallelreihen, so kann man sagen:

(7A) Eine n-gliedrige Determinante ist durch p^n teilbar, wenn jedes Element durch p teilbar ist.

Satz (7) läßt sich auch dahin aussprechen:

(7B) Man multipliziert eine Determinante mit einer Zahl, indem man die Elemente irgend einer Parallelreihe mit dieser Zahl multipliziert.

Für $p = -1$ ergibt sich der

8. Satz. Die Vorzeichen einer Parallelreihe können in die entgegengesetzten verwandelt werden, falls gleichzeitig die Determinante das entgegengesetzte Vorzeichen erhält.

$$\begin{vmatrix} -a & -b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Ebenfalls eine Folge von (7) unter Berücksichtigung von (6) ist der

9. Satz. Eine Determinante verschwindet, falls die Glieder einer Parallelreihe proportional den entsprechenden Gliedern einer anderen sind.

$$\begin{vmatrix} a & b & p\cdot a & d \\ a' & b' & p\cdot a' & d' \\ a'' & b'' & p\cdot a'' & d'' \\ a''' & b''' & p\cdot a''' & d''' \end{vmatrix} = p\cdot \begin{vmatrix} a & b & a & d \\ a' & b' & a' & d' \\ a'' & b'' & a'' & d'' \\ a''' & b''' & a''' & d''' \end{vmatrix} = 0.$$

Es mögen jetzt in einer n-gliedrigen Determinante die Elemente einer Zeile (z. B. der i-ten) aus je m Summanden bestehen:

$$\begin{aligned} a_{i1} &= \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \cdots \\ a_{i2} &= \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{in} &= \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \cdots \end{aligned}$$

Dann weist in der Entwicklung der Determinante jedes Glied eine solche Summe als Faktor auf; das Hauptglied heißt z. B.

$$a_{11}\, a_{22} \ldots a_{i-1, i-1} \cdot (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \ldots) \cdot a_{i+1, i+1} \cdots a_{nn}.$$

Die Summe aller dieser $n!$ Glieder kann (durch Ausmultiplizieren) in $m \cdot n!$ Glieder zerlegt werden. Dabei mögen erst alle Glieder mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ hingeschrieben werden, dann diejenigen mit $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ usw. Auf diese Weise wird man folgende m Determinanten erkennen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ (\alpha_1 + \beta_1 + \ldots) \ldots (\alpha_n + \beta_n + \ldots) \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \beta_1 \ldots \beta_n \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots.$$

Zur Übung führe man dasselbe nochmals unter Vertauschung von Zeilen und Kolonnen durch.

Das Ergebnis dieser Betrachtung kann zusammengefaßt werden in den

10. Satz. Sind in einer Determinante die Elemente einer Parallelreihe Aggregate von je m Gliedern, so läßt sich diese Determinante in ein Aggregat von m Determinanten zerlegen, die in allen Teilen mit der früheren übereinstimmen und nur an Stelle der zusammengesetzten Parallelreihe je eines der m Glieder enthalten.

Umgekehrt kann man hiernach die Summe (Differenz) zweier oder mehrerer Determinanten vom n-ten Grad mit $(n-1)$ gleichen Zeilen (Kolonnen) als einzige Determinante schreiben.

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & b_1 \\ a_2 & \alpha_2 & b_2 \\ a_3 & \alpha_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & b_1 \\ a_2 & \beta_2 & b_2 \\ a_3 & \beta_3 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \gamma_1 & b_1 \\ a_2 & \gamma_2 & b_2 \\ a_3 & \gamma_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 & b_1 \\ a_2 & \alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2 & b_2 \\ a_3 & \alpha_3 + \beta_3 - \gamma_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+p & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' & m \\ a_1 & a_1' & a_1'' & m_1 \\ a_2 & a_2' & a_2'' & m_2 \\ a_3 & a_3' & a_3'' & m_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & a' & a'' & n \\ a_1 & a_1' & a_1'' & n_1 \\ a_2 & a_2' & a_2'' & n_2 \\ a_3 & a_3' & a_3'' & n_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a' & a'' & m \pm n \\ a_1 & a_1' & a_1'' & m_1 \pm n_1 \\ a_2 & a_2' & a_2'' & m_2 \pm n_2 \\ a_3 & a_3' & a_3'' & m_3 \pm n_3 \end{vmatrix}.$$

Die Sätze (9) und (10) führen zusammen zum

11. Satz. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, falls man zu den Elementen einer Parallelreihe die mit einer beliebigen Zahl p multiplizierten entsprechenden Elemente einer andern Parallelreihe addiert. (Jacobi.)

Die veränderte Determinante zerfällt nämlich nach (10) wieder in zwei Determinanten, von denen die eine gleich der ursprünglichen ist und die andere nach (9) verschwindet, wie aus folgendem Beispiel hervorgeht:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c + p \cdot a \\ a' & b' & c' + p \cdot a' \\ a'' & b'' & c'' + p \cdot a'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & p \cdot a \\ a' & b' & p \cdot a' \\ a'' & b'' & p \cdot a'' \end{vmatrix}}_{=0}.$$

Bemerkenswert ist der Sonderfall $p = 1$.

Macht man von den bisher entwickelten Sätzen einen zweckmäßigen Gebrauch, so kann man oft eine Determinante bedeutend vereinfachen.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 8 & 10 \\ 10 & 15 & 7 & 9 \\ 14 & 16 & 8 & 11 \\ 22 & 31 & 15 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 7 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -8 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die zweite Determinante folgt aus der ersten durch Verminderung der Elemente der ersten und dritten Zeile um die entsprechenden Elemente der zweiten Zeile und durch Verminderung der Elemente der vierten Zeile um die mit 2 multiplizierten entsprechenden Elemente der zweiten Zeile. Die dritte Determinante folgt aus der zweiten durch Verminderung der Elemente der zweiten Zeile um die mit 6 multiplizierten entsprechenden Elemente der ersten Zeile. Jetzt hat man erreicht, daß die Elemente einer Parallelreihe alle

untereinander gleich sind. Die vierte Determinante folgt aus der dritten durch Subtraktion der Elemente der ersten Zeile je von den entsprechenden Elementen der zweiten, dritten und vierten Zeile. Dadurch hat man eine Determinante erhalten, deren Elemente einer Parallelreihe alle bis auf eins verschwinden. Wie sich die Berechnung einer solchen Determinante weiter gestaltet, wird im nächsten Paragraphen (3. Satz) gezeigt.

Denkt man sich in

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

jedes Element mit p^{i-k} multipliziert, wobei i der erste Index und k der zweite Index des Elementes sein soll, so wird z. B. das Glied

$$a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2}\, a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n}$$

übergehen in

$$a_{1\alpha_1} \cdot p^{1-\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot p^{2-\alpha_2} \cdot a_{3\alpha_3} \cdot p^{3-\alpha_3} \cdot \dots \cdot a_{n\alpha_n} \cdot p^{n-\alpha_n},$$

so daß das Glied $a_{1\alpha_1} \dots a_{n\alpha_n}$ den Faktor

$$p^{1-\alpha_1+2-\alpha_2+\dots+n-\alpha_n}$$

bekommt. Nun sind aber die Zahlen α weiter nichts als die Zahlen von 1 bis n in irgend einer Anordnung; ihre Summe ist demnach ebenso groß als die der Zahlen von 1 bis n. Also ist dieser Faktor

$$p^0 = 1.$$

Jedes der $n!$ Glieder der Determinante ändert sich demnach überhaupt nicht, woraus folgt der

12. Satz. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man jedem Element die $(i-k)$-te Potenz von irgend einer Zahl p als Faktor beifügt, wobei i die Zeile und k die Kolonne angibt, die sich in dem betreffenden Element kreuzen.

Für $p = -1$ wird ein Teil der Elemente negativ, während die anderen Elemente unverändert bleiben. Man nennt diejenigen Stellen der Determinante, an denen jetzt positive Elemente stehen, gerade und die anderen ungerade Stellen.

§ 7. Unterdeterminanten im engeren Sinne.

Nach dem Entwicklungsgesetz werden von den $n!$ Gliedern der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

eine ganze Anzahl das Element a_{11} als Faktor haben; ihre Summe sei $a_{11} A_{11}$. Von den übrigbleibenden Gliedern werden dann einige den Faktor a_{12} haben; ihre Summe sei $a_{12} A_{12}$. Von den nunmehr übrigbleibenden Gliedern werden wieder diejenigen zusammengefaßt, welche a_{13} als Faktor aufweisen, und ihre Summe mit $a_{13} A_{13}$ bezeichnet usw. Schließlich werden nur solche Glieder übrigbleiben, die a_{1n} als Faktor aufweisen: sie werden mit $a_{1n} A_{1n}$ bezeichnet. Demnach kann man schreiben:

$$D = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}.$$

Es muß noch darauf hingewiesen werden, daß jede einzelne Teilsumme auch die Gesamtheit aller Glieder ist, welche das betreffende Element als Faktor haben. Würde man nämlich annehmen, es befände sich z. B. außer den durch $a_{1r} A_{1r}$ dargestellten Gliedern in den vorausgenommenen bereits ein solches, welches a_{1r} enthält, so müßte

dasselbe außer a_{1r} sicher noch eins der Elemente a_{11}, $a_{12}, \ldots, a_{1,r-1}$ enthalten, also zwei Elemente einer Parallelreihe, was bekanntlich ausgeschlossen ist.

Greift man nicht die Elemente der ersten Zeile, sondern die einer beliebigen, z. B. der i-ten heraus, so wird man in ähnlicher Weise schreiben können:

$$D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in},$$

wo also z. B. $a_{i2} \cdot A_{i2}$ die Summe aller Glieder von D bedeutet, die das Element a_{i2} als Faktor enthalten.

Ebenso kann man weiterhin die Elemente einer Kolonne bevorzugen:

$$D = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \ldots + a_{nk} A_{nk}.$$

Eine derartige Darstellung der Determinante nennt man ihre Entwicklung nach den Elementen einer Parallelreihe. (Cramer, Cauchy, Jacobi.)

Man sieht aus diesen Betrachtungen, daß es n^2 ganz bestimmte Größen A_{ik} gibt, von denen jede einem bestimmten Element a_{ik} zugeordnet ist, und zwar in der Weise, daß sie mit diesem Element multipliziert die Summe aller der Glieder der Determinanten liefert, welche das ihr zugeordnete Element als Faktor enthalten.

Die eben neu eingeführten Größen A_{ik} sollen jetzt weiter untersucht werden.

Zu diesem Zwecke mag ganz allgemein die Summe aller der Glieder gefunden werden, die das durch die i-te Zeile und k-te Kolonne definierte Element a_{ik} enthalten, also $a_{ik} A_{ik}$.

Im Hauptglied

$$a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{i-1,i-1}\ a_{ii}\ a_{i+1,i+1}\ \ldots$$
$$\ldots\ a_{k-1,k-1}\ a_{kk}\ a_{k+1,k+1}\ \ldots\ a_{nn}$$

werde eine zyklische Vertauschung der ersten Indizes von 1 bis i vorgenommen:

$$a_{i1}\ a_{12}\ a_{23}\ \ldots\ a_{i-2,i-1}\ a_{i-1,i}\ a_{i+1,i+1}\ \ldots$$
$$\ldots\ a_{k-1,k-1}\ a_{kk}\ a_{k+1,k+1}\ \ldots\ a_{nn},$$

womit nach Früherem (S. 19) $i-1$ Zeichenwechsel verbunden sind. Darauf werde eine abermalige zyklische Vertauschung, und zwar der zweiten Indizes von 1 bis k vorgenommen:

$$a_{ik}\ a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{i-2,i-2}\ a_{i-1,i-1}\ a_{i+1,i}\ a_{i+2,i+1}\ \ldots$$
$$\ldots\ a_{k-1,k-2}\ a_{k,k-1}\ a_{k+1,k+1}\ \ldots\ a_{nn},$$

womit abermals Zeichenwechsel, und zwar $k-1$ verbunden sind. Im ganzen kommen also $i+k-2$ Zeichenwechsel in Betracht, d. h. das letzterwähnte Glied hat den Faktor

$$(-1)^{i+k-2} = (-1)^{i+k}$$

zu erhalten.

Aus jedem einzelnen Glied der Determinante können alle anderen durch Permutation der ersten oder zweiten Indizes bestimmt werden, d. h. es kann hinsichtlich des oben erwähnten Gliedes geschrieben werden:

$$D = (-1)^{i+k} \sum \pm a_{ik} a_{11} \ldots a_{i-1,i-1} a_{i+1,i} \ldots$$
$$\ldots a_{k,k-1} a_{k+1,k+1} \ldots a_{nn}.$$

Will man nur diejenigen Glieder aus der hierdurch dargestellten Gesamtanzahl $n!$ haben, welche das Element a_{ik} als Faktor enthalten, so schließt man den ersten Index i (oder den zweiten Index k) von der Permutation der ersten (oder der zweiten) Indizes der Elemente aus. Das

Element a_{ik} kann dann vor das Summenzeichen treten, was einem Ausklammern gleichkommt. Somit erhält man:

$$a_{ik} \cdot A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \sum \pm a_{11} \cdots a_{i-1,\,i-1}\, a_{i+1,\,i} \cdots \cdots a_{k,\,k-1}\, a_{k+1,\,k+1} \cdots a_{nn}$$

oder

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot \sum \pm a_{11} \cdots a_{i-1,\,i-1}\, a_{i+1,\,i} \cdots \cdots a_{k,\,k-1}\, a_{k+1,\,k+1} \cdots a_{nn}\,.$$

Das ist aber nichts anderes als eine mit $(-1)^{i+k}$ multiplizierte $(n-1)$-gliedrige Determinante; in ihrem Hauptglied folgen die Indizes in der natürlichen Zahlenfolge aufeinander, jedoch fehlt bei den Zeilenindizes i und bei den Kolonnenindizes k.

Die neue Determinante geht somit aus der ursprünglichen hervor, indem man dort die i-te Zeile und die k-te Kolonne unterdrückt (ausläßt):

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,\,k-1} & a_{1,\,k+1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,\,1} & \cdots & a_{i-1,\,k-1} & a_{i-1,\,k+1} & \cdots & a_{i-1,\,n} \\ a_{i+1,\,1} & \cdots & a_{i+1,\,k-1} & a_{i+1,\,k+1} & \cdots & a_{i+1,\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,\,1} & & a_{n,\,k-1} & a_{n,\,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante mit dem durch i und k definierten Vorzeichen bezeichnet man als Unterdeterminante des Elementes a_{ik} der Hauptdeterminante D.

Es mag hier schon hervorgehoben werden, daß später ganz allgemeine Unterdeterminanten besprochen werden sollen, von denen die jetzigen Sonderfälle vorstellen, und in diesem Sinne wurde in der Überschrift von Unterdeterminanten im engeren Sinne gesprochen; vorläufig mögen die eben bestimmten Determinanten schlechtweg mit Unterdeterminanten bezeichnet werden.

Aus den bisherigen Betrachtungen ergibt sich folgende

Definition der Unterdeterminanten:

1. Satz. Man versteht unter der Unterdeterminante A_{ik} irgend eines Elementes a_{ik} von

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

diejenige Determinante, welche man erhält, wenn man in D die i-te Zeile und die k-te Kolonne unterdrückt, versehen mit dem Vorzeichen von $(-1)^{i+k}$. Diese Determinante A_{ik} hat die Eigenschaft, daß sie, mit a_{ik} multipliziert, die Summe derjenigen Glieder gibt, die in der Entwicklung von D das Element a_{ik} als Faktor enthalten.

In bezug auf die Vorzeichen mag an die Entwicklung von (12) in § 6 erinnert werden; man erkennt leicht, daß die Unterdeterminanten jener Elemente als positiv zu bezeichnen sind, die an geraden Stellen stehen, und daß die andern negativ zu rechnen sind. Folgendes Schachbrettschema gibt hierfür einen Überblick:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Ferner mag nochmals an die doppelte Darstellung von D erinnert werden in folgender Form:

$$D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$D = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \ldots + a_{nk} A_{nk} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Jede dieser Gleichungen stellt n Gleichungen dar, entsprechend den n Werten von i bzw. k, so daß also D entsprechend den n Zeilen und n Kolonnen in $2\,n$-facher Weise nach Parallelreihen entwickelt dargestellt werden kann.

Diese Darstellung wurde oben als Entwicklung der Determinante nach den Elementen von Parallelreihen bezeichnet; man kann sie mit demselben Recht als Entwicklung nach den Unterdeterminanten der Elemente von Parallelreihen betrachten.

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Man beachte die analoge Schreibweise der dreigliedrigen Determinante auf S. 28.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + a_{14} A_{14} \\ &= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23} + a_{24} A_{24} \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned}$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$- a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

usw.

Man versuche diese beiden Entwicklungen zu identifizieren mit der Darstellung derselben Determinante auf S. 29. Andererseits kann man diese Entwicklungen ansehen als Lösung der dort vorgeschlagenen Übung. Man wird jetzt auch besser die dortige Andeutung bezüglich der Überführung von Determinanten in solche niederer Ordnung verstehen.

Von der Bedeutung der Unterdeterminanten bekommt man ferner einen Begriff, wenn man sich überlegt, daß die Sätze (2), (7) und (8) von § 6 sich von selbst verstehen, sobald die dort erwähnten Determinanten nach

den Elementen der dort besonders hervorgehobenen Zeilen entwickelt werden.

Folgende Sätze ergeben sich ohne weiteres aus der Definition:

2. Satz. Jede Unterdeterminante ist von den Elementen der sie bestimmenden Zeile und Kolonne unabhängig.

3. Satz. Verschwinden in einer Zeile oder Kolonne alle Elemente bis auf eines, so reduziert sich der Wert der Determinante auf das Produkt dieses Elementes mit seiner Unterdeterminante, also auf eine Determinante der nächstniederen Ordnung. (Jacobi.)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Hier mag daran erinnert werden, daß man nach den Entwicklungen im Anschluß an (11) § 6 jede Determinante auf die Form bringen kann, welche in diesem Satz verlangt wird: durch mehrmalige Anwendung des früheren Verfahrens im Verein mit dem eben angeführten 3. Satz läßt sich also der Grad einer Determinante beliebig erniedrigen. Man erkennt hieraus die Bedeutung der Unterdeterminanten für die Auswertung der Determinanten.

S. 39 hatten wir eine Determinante auf diese Form gebracht; sie mag hier vom Leser ihrem Werte nach zur Übung berechnet werden.

Durch fortgesetzte Anwendung von (3) läßt folgendes Beispiel einen andern Satz erkennen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdot a_{55}.$$

4. Satz. Sind alle Elemente auf einer Seite der Hauptdiagonale Null, so ist die Determinante ihrem Werte nach gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonale.

Die Elemente auf der anderen Seite der Hauptdiagonale kommen also für den Wert der Determinante nicht in Betracht.

Sind alle Elemente zu beiden Seiten der Hauptdiagonale gleich Null und die der Hauptdiagonale gleich 1, so haben wir die sogenannte Einheitsdeterminante.

Der 4. Satz gibt ein Mittel an die Hand, jede Determinante in eine solche von der nächsthöheren Ordnung, allgemein sogar in eine solche von beliebig höherer Ordnung zu verwandeln. Soll z. B. die dreigliedrige Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

in eine fünfgliedrige Determinante verwandelt werden, so braucht man sie nur zu schreiben:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

wobei die x und y vollständig willkürlich sein können. Die zweimalige Zerlegung in Unterdeterminanten führt rückwärts auf die ursprüngliche dreigliedrige Determinante.

Allgemein würde dieses „Verfahren der (Null)-Ränderung" (Säumung) einer Determinante auszusprechen sein:

5. Satz. Soll eine Determinante n-ten Grades, ohne daß ihr Wert geändert wird, einen um m Einheiten höheren Grad erlangen, so setze man in die Verlängerung der Hauptdiagonale m Einsen und fülle die Stellen der hierdurch angedeuteten erweiterten Determinante auf der einen Seite der Hauptdiagonale durch Nullen und auf der andern Seite durch beliebige Größen aus.

Die 2 n-fach mögliche Darstellung einer n-gliedrigen Determinante (S. 46) in Verbindung mit den Sätzen (6) § 6 führt zum

6. Satz. Während die Summe der Produkte aller Elemente einer Parallelreihe mit den betreffenden Unterdeterminanten die Determinante selbst ergibt, verschwindet die Summe der Produkte aller Elemente einer Parallelreihe

mit den entsprechenden Unterdeterminanten der Elemente einer anderen Parallelreihe. (Cramer, Cauchy, Jacobi.)

Man kann diesen Satz auch ausdrücken durch die Doppelgleichung:

$$\sum a_{ik} A_{rs} = \begin{cases} D, & \text{falls } i = r \text{ und } k = s \text{ und entweder } i \text{ oder } k \text{ alle Werte von 1 bis } n \text{ durchläuft.} \\ 0, & \text{falls } i \neq r \text{ (oder } k \neq s) \text{ und } k \text{ und } s \text{ (oder } i \text{ und } r) \text{ gleichzeitig alle Werte von 1 bis } n \text{ durchlaufen.} \end{cases}$$

Über die Differentiation einer Determinante (Jacobi).

Werden die n^2 Elemente a der n-gliedrigen Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

als voneinander unabhängige Variable betrachtet, so ist D nach dem Bildungsgesetz bezüglich jedes der n^2 Elemente vom ersten Grad, oder mit andern Worten, die Determinante D ist in 2 n-fach verschiedener Weise als lineare Funktion der Variablen einer Parallelreihe darstellbar.

Differentiiert man unter der eben gemachten Annahme, daß alle Elemente voneinander unabhängige Variable sind, D nach a_{ik}, so können nur die durch $a_{ik} A_{ik}$ dargestellten Glieder in Betracht kommen; da ferner A_{ik} auch von a_{ik} unabhängig ist, so kann man schreiben:

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ik}} = \frac{\partial (a_{ik} \cdot A_{ik})}{\partial a_{ik}} = A_{ik} .$$

Unter den gemachten Voraussetzungen darf man also sagen:

7. Satz. Die bezüglich eines beliebigen ihrer Elemente gebildete Abgeleitete einer Determinante ist gleich der Unterdeterminante des betreffenden Elementes.

Sind die a im besonderen alle Funktionen von einer Variablen, z. B. von x, so kann man schreiben:

$$\frac{dD}{dx} = \sum_{ik} \frac{\partial D}{\partial a_{ik}} \cdot \frac{da_{ik}}{dx} = \sum_{ik} A_{ik} \frac{da_{ik}}{dx}.$$

Die Summe erstreckt sich über n^2 Glieder, denn i und k müssen alle Werte von 1 bis n annehmen.

Führt man zunächst nur die Summation bezüglich k aus, so kommt:

$$\frac{dD}{dx} = \sum_i A_{i1} \frac{da_{i1}}{dx} + \sum_i A_{i2} \frac{da_{i2}}{dx} + \dots + \sum_i A_{in} \frac{da_{in}}{dx}.$$

Führt man $\frac{da_{ik}}{dx} = a'_{ik}$ ein, und bedenkt man, daß jede einzelne Summe als Determinante geschrieben werden kann, so ist für $n = 3$:

$$\frac{dD}{dx} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Man schreibt diese Gleichung auch:

$$\begin{vmatrix} da_{11} & da_{12} & da_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ da_{21} & da_{22} & da_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ da_{31} & da_{32} & da_{33} \end{vmatrix}.$$

§ 8. Unterdeterminanten im weiteren Sinne.

Unterdeterminanten $(n-2)$-ter Ordnung.

Am Anfang von § 7 wurde die Aufgabe behandelt, in der Entwicklung von:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

den Faktor von a_{ik} zu bestimmen. Jetzt soll in derselben Entwicklung der Faktor von $a_{ik} \cdot a_{rs}$ bestimmt werden, wobei die Indizes i und r $(i < r)$ zwei beliebige Zeilen und k und s $(k < s)$ zwei beliebige Kolonnen definieren mögen.

Im Anfangsglied (oder in D) $a_{11} \dots a_{ii} \dots a_{rr} \dots a_{nn}$ führt man eine zyklische Vertauschung der ersten Indizes 1 bis i aus ($i - 1$ Zeichenwechsel von D):

$$a_{i1}\ a_{12}\ a_{23} \dots a_{i-1,i}\ a_{i+1,i+1} \dots a_{rr} \dots a_{nn}$$

und hierin eine ebensolche der ersten Indizes von 1 bis r, wobei zu beachten ist, daß der Index i fehlt ($r - 2$ weitere Zeichenwechsel von D):

$$a_{i1}\ a_{r2}\ a_{13} \dots a_{i-2,i}\ a_{i-1,i+1}\ a_{i+1,i+2} \dots$$
$$\dots a_{r-1,r}\ a_{r+1,r+1} \dots a_{nn}.$$

Jetzt läßt man die ersten Indizes in dieser Aufeinanderfolge stehen und führt eine zyklische Vertauschung der zweiten Indizes 1 bis k aus ($k - 1$ Zeichenwechsel von D) und darauf eine ebensolche der zweiten Indizes 1 bis s, wobei wieder zu beachten ist, daß der Index k fehlt ($s - 2$ weitere Zeichenwechsel von D). Im ganzen haben nunmehr:

$$(i-1) + (r-2) + (k-1) + (s-2)$$

Zeichenwechsel stattgefunden, so daß die veränderte Determinante das Vorzeichen von

$$(-1)^{i+r+k+s}$$

erhalten muß, denn:

$$(-1)^{i-1+r-2+k-1+s-2} = (-1)^{i+r+k+s}.$$

Betreffs der Aufeinanderfolge der Indizes ist zu bemerken, daß die Reihenfolge der ersten Indizes lautet:

$$i, r, 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n,$$

während die der zweiten heißt:

$$k, s, 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n.$$

Unter

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ r\,s \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn})$$

verstehe man das Produkt von $(n-2)$ Elementen a, die wie gewöhnlich durch doppelte Indizes gekennzeichnet seien; die Reihenfolge der ersten sowohl wie die der zweiten Indizes sei die der natürlichen Zahlenreihe, jedoch derart, daß in der Aufeinanderfolge der ersten Indizes i und r, in der der zweiten die Indizes k und s fehlen.

Mit Hilfe dieser neuen Bezeichnungsweise kann das Glied, welches aus dem Anfangsglied durch die vier obigen zyklischen Vertauschungen hervorgeht, unter Berücksichtigung der Zeichenwechsel geschrieben werden:

$$(-1)^{i+r+k+s} a_{ik}\, a_{rs} \begin{Bmatrix} i\,k \\ r\,s \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn}).$$

Wollte man aus diesem Gliede die Determinante entwickeln, so würde sein:

$$D = (-1)^{i+r+k+s} \sum \pm\, a_{ik}\, a_{rs} \begin{Bmatrix} i\,k \\ r\,s \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn}).$$

Man erhält alle diejenigen Glieder der Entwicklung von D, welche die Elemente a_{ik}, a_{rs} als Faktoren enthalten, wenn man in der letzten Gleichung die Indizes i, k, r, s von der Permutation ausschließt, so daß die Summe der gewünschten Glieder, die mit

$$a_{ik}\, a_{rs}\, A_{\begin{Bmatrix} i\,k \\ r\,s \end{Bmatrix}}$$

bezeichnet werde, folgende ist:

$$a_{ik} a_{rs} \cdot A_{\begin{Bmatrix} i\,k \\ r\,s \end{Bmatrix}} = (-1)^{i+r+k+s} \cdot a_{ik} \cdot a_{rs} \sum \pm \begin{Bmatrix} i\,k \\ r\,s \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn})$$

oder

$$A_{\begin{Bmatrix} i\,k \\ r\,s \end{Bmatrix}} = (-1)^{i+r+k+s} \sum \pm \begin{Bmatrix} i\,k \\ r\,s \end{Bmatrix} (a_{11} \ldots a_{nn}).$$

Man erkennt hiernach sofort, daß $A_{\begin{Bmatrix} i\,k \\ r\,s \end{Bmatrix}}$ die mit dem Vorzeichen von $(-1)^{i+r+k+s}$ versehene Determinante ist, die man aus D erhält, falls man in D die i-te und r-te Zeile und k-te und s-te Kolonne unterdrückt:

$$\begin{vmatrix}
a_{11} \cdots a_{1,k-1} & a_{1,k+1} \cdots a_{1,s-1} & a_{1,s+1} \cdots a_{1n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_{i-1,1} \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\hline
a_{i+1,1} \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_{r-1,1} \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\hline
a_{r+1,1} \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_{n1} \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{vmatrix}$$

Wurden früher solche Determinanten, die durch Unterdrückung einer Zeile und einer Kolonne entstanden, Unter-

determinanten schlechthin genannt, so mögen auch die jetzt durch Unterdrückung zweier Zeilen und zweier Kolonnen entstehenden Determinanten den Namen Unterdeterminanten erhalten, allerdings im weiteren Sinn. Die früheren Unterdeterminanten im engeren Sinn können nämlich als Unterdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung der n-gliedrigen Hauptdeterminante bezeichnet werden und die jetzigen dementsprechend als solche $(n-2)$-ter Ordnung. Man erkennt hiernach schon, daß ganz allgemein unter Unterdeterminanten solche verstanden werden, die durch Unterdrückung von gleichen Anzahlen Zeilen und Kolonnen aus der Hauptdeterminante entstehen.

Durch

$$a_{ik}\, a_{rs}\, A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$$

werden zwar alle Glieder dargestellt, die a_{ik} und a_{rs} als Faktoren aufweisen, jedoch noch nicht alle, deren Summe $A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$ als Faktor enthält; denn man braucht nur in allen durch

$$a_{ik} \cdot a_{rs} \cdot A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$$

dargestellten Gliedern die Transposition (k, s) auszuführen (Zeichenwechsel!), so stellt

$$-a_{is} \cdot a_{rk} \cdot A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$$

eine weitere Gliedersumme dar, welche $A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$ als Faktor enthält. Da die beiden Zahlen s und k nur die beiden Permutationen (k, s) und (s, k) zulassen, so wird durch

$$(a_{ik}\, a_{rs} - a_{is}\, a_{rk}) \cdot A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$$

diejenige Gliedersumme dargestellt, welche $A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$ als Faktor enthält. Schreibt man:

$$(a_{ik}\, a_{rs} - a_{is}\, a_{rk}) = \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{rk} \\ a_{is} & a_{rs} \end{vmatrix} = a_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}},$$

so ist $a_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$ der Koeffizient von $A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$ in der

Entwicklung von D nach Unterdeterminanten $(n-2)$-ter Ordnung, welche jetzt gezeigt werden soll.

Durch

$$a_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}} \cdot A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$$

werden von den $n!$ Gliedern der n-gliedrigen Determinante D nur $2! \cdot (n-2)!$ dargestellt. Will man die übrigen auch durch Unterdeterminanten $(n-2)$-ter Ordnung ausdrücken, so muß man sie in derselben Weise zu je $2! \cdot (n-2)!$ zusammenfassen, was offenbar $\binom{n}{2}$-mal möglich ist. Erst müssen die beiden Indizes k und s einerseits und die $(n-2)$ übrigen zweiten Indizes andererseits auf alle mögliche Art permutiert werden, was zu den beiden Determinanten $a_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$ und $A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}}$ führt, deren Produkt die obigen $2! \cdot (n-2)!$ Glieder liefert. Nun müssen je zwei zweite Indizes aus der Ziffernfolge $1, 2, \ldots, n$ auf alle mögliche Weise herausgegriffen werden, was mit der Aufstellung aller $\binom{n}{2}$ möglichen zweigliedrigen Determinanten aus der Matrix

$$\begin{matrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{matrix}$$

zusammenfällt. Durch irgend eine zweigliedrige Determinante a dieser Matrix sind in der n-gliedrigen Deter-

minante D zwei Zeilen und zwei Kolonnen gekennzeichnet, welche unterdrückt werden müssen, damit man diejenige $(n-2)$-gliedrige Uuterdeterminante erhält, mit der die eben erwähnte zweigliedrige Determinante in der gesuchten Entwicklung multipliziert erscheint. Die Summe aller in der obigen Matrix enthaltenen zweigliedrigen Determinanten multipliziert mit den entsprechenden $(n-2)$-gliedrigen Unterdeterminanten ist die gesuchte Entwicklung nach $(n-2)$-gliedrigen Unterdeterminanten; sie wird ausgedrückt durch folgende Formel:

$$D = \sum_{k,\,s} a_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}} \cdot A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}} \qquad (k,\, s = 1,\, 2,\, \ldots,\, n),$$

die sich nach den vorausgegangenen Betrachtungen von selbst versteht.

Die früheren Entwicklungen von D nach den Elementen einer Parallelreihe (vgl. S. 46) wurden bereits S. 51 durch eine Summenformel angedeutet. Letztere hätte man bei Bevorzugung der Kolonnen auch schreiben können:

$$D = \sum_k a_{ik} A_{ik} \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n),$$

womit eine gewisse Ähnlichkeit mit der obigen Formel erreicht ist.

D verschwindet bekanntlich, sobald zwei Parallelreihen identisch sind. Da können die beiden Parallelreihen entweder beide zur Bildung der obigen zweigliedrigen Determinante beitragen, oder beide nicht, oder schließlich nur eine von ihnen. Diese Überlegungen, weiter ausgeführt, würden zu einer ähnlichen umfassenden Formel führen, wie sie S. 51 gegeben wurde.

Über die verschiedenen Möglichkeiten, ein und dieselbe n-gliedrige Determinante nach $(n-2)$-gliedrigen

Unterdeterminanten zu entwickeln, ist folgendes zu bemerken. Man kann in $\binom{n}{2}$-fach verschiedener Weise von den n Zeilen je zwei zur Bildung der zweigliedrigen Determinanten herausgreifen, was natürlich auch für die Kolonnen gilt, so daß also eine n-gliedrige Determinante in $2 \cdot \binom{n}{2} = n(n-1)$-fach verschiedener Weise nach $(n-2)$-gliedrigen Unterdeterminanten entwickelt werden kann.

Als Beispiel für die Entwicklung einer viergliedrigen Determinante nach zweigliedrigen Unterdeterminanten soll folgende Determinante zerlegt werden, und zwar nach Unterdeterminanten $(n-2=2)$ der 3. und 4. Kolonne:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{5+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + (-1)^{5+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{6+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + (-1)^{7+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$$

Die für die Vorzeichen wichtige Summe $i + r + k + s$ (vgl. S. 55) wurde jedesmal aus der ersten Determinante bestimmt.

Ein weiteres Beispiel, die Entwicklung einer fünfgliedrigen Determinante nach dreigliedrigen Unterdeterminanten, mag die vorausgegangenen Betrachtungen ebenfalls erläutern. Die Entwicklung wird $\binom{5}{2} = 10$ Produkte aufweisen, von denen jedes aus einer zwei- und einer dreigliedrigen Determinante besteht; zur Entwicklung wurde bevorzugt die dritte

und fünfte Kolonne. Der Leser muß sich daran gewöhnen, die folgende Determinante auch gleich als solche mit Elementen von doppelten Indizes lesen zu können. Er wird dann die vorausgegangenen Betrachtungen leicht an den speziellen Fällen $n = 5$, $i = 1$, $r = 2$, $k = 3$, $s = 5$ nachrechnen und prüfen können:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} c_1 & e_1 \\ c_2 & e_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \\ a_5 & b_5 & d_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & e_1 \\ c_3 & e_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \\ a_5 & a_5 & d_5 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} c_1 & e_1 \\ c_4 & e_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_5 & b_5 & d_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & e_1 \\ c_5 & e_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} c_2 & e_2 \\ c_3 & e_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_4 & b_4 & d_4 \\ a_5 & b_5 & d_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_2 & e_2 \\ c_4 & e_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_5 & b_5 & d_5 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} c_2 & e_2 \\ c_5 & e_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_3 & e_3 \\ c_4 & e_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_5 & b_5 & d_5 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} c_3 & e_3 \\ c_5 & e_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_4 & e_4 \\ c_5 & e_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Auch die $(n - 2)$-gliedrigen Unterdeterminanten einer n-gliedrigen Determinante D lassen eine Bezeichnungsweise durch Differentiation zu, falls wieder die n^2 Ele-

mente als voneinander unabhängige Variable angesehen werden:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial a_{ik}\, \partial a_{rs}} = A_{\left\{ {ik \atop rs} \right\}},$$

worauf aber nicht weiter eingegangen werden soll.

Unterdeterminanten ganz allgemeiner Natur.

Streicht man in einer Determinante n-ter Ordnung m Zeilen (charakterisiert durch die Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$) und ebenso viele Kolonnen $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, wobei natürlich $m < n$, so bildet die Determinante der übriggebliebenen quadratischen Matrix eine Unterdeterminante $(n - m)$-ter Ordnung. Sie werde analog der früheren Bezeichnung benannt:

$$A_{\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m \end{smallmatrix} \right\}}.$$

Es muß allerdings hervorgehoben werden, daß wir früher unter $A_{\{\,\}}$ die Determinante der übriggebliebenen Matrix versehen mit dem richtigen Vorzeichen verstanden, wie sie in der Entwicklung der Determinante vorkommt; so soll es auch jetzt wieder gehalten werden. Es bestimmt sich dieses Vorzeichen durch*)

$$(-1)^{\Sigma\alpha + \Sigma\beta},$$

wo $\sum \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_m$ und $\sum \beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_m$ sein soll. Der Faktor, mit dem $A_{\{\,\}}$ in der schon erwähnten Gesamtentwicklung:

$$\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

*) Auf die Ableitung dieser Unterdeterminanten $(n - m)$-ter Ordnung werde nicht näher eingegangen; sie gestaltet sich analog derjenigen $(n - 2)$-ter Ordnung.

multipliziert erscheint, ist ebenfalls wieder eine Determinante, und zwar diejenige der Elemente, in denen sich die oben unterdrückten Zeilen und Kolonnen kreuzen; wir bezeichnen sie wieder durch:

$$a_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}}.$$

In

$$a_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}} \cdot A_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}}$$

hat man von den $n!$ Gliedern der entwickelten Determinante erst $(n - m)! \cdot m!$. Nach den bereits mehrfach erwähnten Erörterungen erhält man alle $n!$ Permutationen und damit alle $n!$ Glieder der Determinante, falls man für jede mögliche Gruppeneinteilung der n Elemente zu je m und $(n - m)$ die bisherigen $(n - m)! \cdot m!$ Permutationen bildet. Das ist aber in $\binom{n}{m}$-fach verschiedener Weise möglich.

In die Sprache der Determinanten übertragen, besagt das nichts anderes, als daß aus den m Kolonnen, welche durch die Indizes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ charakterisiert sind, alle möglichen $\binom{n}{m}$ Determinanten $a_{\{\}}$ m-ten Grades gebildet werden sollen, und daß jede mit der durch sie bestimmten, oben näher bezeichneten Unterdeterminante $A_{\{\}}$ multipliziert wird. Die Summe aller dieser $\binom{n}{m}$ Produkte ist die gesuchte Entwicklung der n-gliedrigen Determinante D nach $(n - m)$-gliedrigen Unterdeterminanten oder, wenn man will, auch nach m-gliedrigen Unter-

determinanten. Man kann diese Entwicklung durch die Formel ausdrücken:

$$D = \sum a_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}} \cdot A_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}}.$$

Eine solche Darstellung ist auf $2\binom{n}{m}$-fache Weise möglich, denn es können $\binom{n}{m}$-mal verschiedene m Kolonnen zur Bildung der $a_{\{\}}$ bevorzugt, außerdem dasselbe für Zeilen ausgeführt werden (Laplacescher Zerlegungssatz).

Eine Übersicht der nach Unterdeterminanten möglichen Entwicklungen einer n-gliedrigen Determinante D geben die früher aufgestellten Summenformeln mit der obigen in folgender Zusammenstellung:

$$D = \sum a_{ik} A_{ik} \qquad 2\,n \text{ Möglichkeiten},$$

$$= \sum a_{\left\{\begin{smallmatrix}ik \\ rs\end{smallmatrix}\right\}} \cdot A_{\left\{\begin{smallmatrix}ik \\ rs\end{smallmatrix}\right\}} \qquad 2 \cdot \binom{n}{2} \quad \text{,,} \quad ,$$

. . . .

$$= \sum a_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}} \cdot A_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}} \qquad 2 \cdot \binom{n}{m} \quad \text{,,} \quad .$$

Die Summen sind also immer gleich D. Nun ist eine Determinante mit gleichen Parallelreihen stets Null. Dem entspricht es, wenn man zur Bildung der $a_{\{\}}$ und $A_{\{\}}$ beliebige m und $(n - m)$ Parallelreihen aus D nimmt; dann sind also die oben verzeichneten Summen $= 0$, wenn auch nur eine gemeinsame Parallelreihe vorkommt.

Die gegebenen Entwicklungen der n-gliedrigen Determinante in eine Summe von Produkten je zweier Unterdeterminanten ist noch nicht der allgemeinste Fall. Die Bildung der $n!$ Permutationen bei Festhaltung von r Gruppen

zu je $m_1, m_2, \ldots, m_r$ Elementen zeigt ohne weiteres das Bildungsgesetz für den Fall, daß die Determinante n-ter Ordnung in eine Summe von Produkten aus je r Unterdeterminanten zerlegt werden soll, von denen die eine m_1, die zweite $m_2, \ldots$, die letzte m_r-gliedrig ist, falls:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n.$$

Jedoch mag darauf nicht weiter eingegangen, sondern nur noch hervorgehoben werden, daß dann $\frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_r!}$ die Anzahl der Determinantenprodukte in der Entwicklung ist. Diese Untersuchungen wurden zuerst von Vandermonde und Laplace angestellt und von Jacobi abgeschlossen.

Statt Unterdeterminante gebraucht man auch die Bezeichnung Adjunkte oder Subdeterminante, Jacobi nannte sie Partialdeterminante, die Engländer haben den Ausdruck Minor eingeführt.

Je zwei Unterdeterminanten, die in der Entwicklung einer Determinante nach Unterdeterminanten miteinander multipliziert auftreten, nennt man nach Cauchy komplementäre Unterdeterminanten; man findet dafür auch die Bezeichnung adjungierte Unterdeterminanten und bezeichnet die eine kurz als Komplement oder als Adjungierte der anderen, wobei man von den Vorzeichen absieht, als mit denen verbunden früher immer die $A_{\{\}}$ angesehen wurden. Dagegen nennt man die $A_{\{\}}$ in der früher verstandenen Weise die algebraischen Komplemente der in der Entwicklung mit ihnen multipliziert auftretenden $a_{\{\}}$.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen kann man die Entwicklung einer Determinante nach Unterdeterminanten durch folgenden Satz ausdrücken.

Jede n-gliedrige Determinante kann als die Summe von $\binom{n}{m}$ Produkten der in m beliebigen Zeilen oder Kolonnen enthaltenen $\binom{n}{m}$ m-gliedrigen Determinanten mit ihren algebraischen Komplementen angesehen werden.

Ferner nennt man Hauptunterdeterminanten, Hauptminoren solche, deren Hauptdiagonalelemente auch solche der Determinante sind. Aus der Bildung der Unterdeterminanten geht ohne weiteres hervor, daß es $\left[\binom{n}{m}\right]^2$ m-gliedrige Unterdeterminanten gibt, von denen $\binom{n}{m}$ Hauptminoren sind.

Unter konjugierten, auch korrespondierenden Unterdeterminanten einer Determinante versteht man je zwei solche, bei denen die Zeilen der einen durch dieselben Indizes charakterisiert werden wie die Kolonnen der anderen und umgekehrt; solche Unterdeterminanten vertauschen beim Umklappen der Determinante um die Hauptdiagonale ihre Plätze. Analoges gilt von den Elementen selbst, die ja als eingliedrige Unterdeterminanten gelten dürfen; in diesem Sinne spricht man auch von konjugierten oder korrespondierenden Elementen. Im besonderen sagt man von einem Hauptminor (Hauptdiagonalelement), daß er (es) zu sich selbst konjugiert ist.

Am Schluß dieser Betrachtungen über Unterdeterminanten mag noch auf einen Begriff aufmerksam gemacht werden, der erst neuerdings eingeführt worden ist (Kronecker), auf den Begriff des Ranges einer Determinante.

Das Verschwinden einer Determinante kann daran

liegen, daß gewisse Unterdeterminanten verschwinden. Ist r die höchste Ordnung der nicht verschwindenden Unterdeterminanten, so hat die Determinante den Rang r.

Hiernach muß eine n-gliedrige nicht verschwindende Determinante den Rang n haben. Der Rang Null wird vorhanden sein, wenn alle Elemente verschwinden. Irgend eine n-gliedrige Determinante mit m gleichen Parallelreihen wird den Rang $n - m + 1$ haben.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 & 9 & 7 \\ 2 & 1 & 9 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 8 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

hat den Rang 3; alle Unterdeterminanten vierter Ordnung und sie selbst verschwinden.

Im gleichen Sinn spricht man auch vom Rang einer Matrix; es wird also eine Matrix den Rang 1 haben, wenn nicht alle ihre Elemente verschwinden und wenn alle zweigliedrigen und höheren Determinanten, die aus den Elementen der Matrix gebildet werden können, gleich Null sind. Ist die Determinante höchster Ordnung, die aus den Elementen irgendeiner Matrix gebildet werden kann und nicht verschwindet, r-gliedrig, so hat diese Matrix den Rang r.

Mit Hilfe der Sätze über Determinanten von § 5 und § 6 ergeben sich dann leicht folgende Sätze über Matrizen:

1. Zwei Matrizen, von denen die eine aus der anderen dadurch folgt, daß man in ihr die Zeilen als Spalten schreibt, haben denselben Rang.

2. Matrizen, die sich nur durch die Anordnung der Zeilen unterscheiden, haben denselben Rang.

3. Der Rang einer Matrix ändert sich nicht, wenn man zu allen Elementen einer Zeile denselben (nicht verschwindenden) Faktor hinzufügt; ebenso darf man die so erweiterten Elemente einer Zeile zu den entsprechenden einer anderen addieren.

4. Der Rang einer Matrix bleibt unverändert, wenn zu den Zeilen eine solche aus lauter Nullen oder eine schon vorhandene Zeile hinzugefügt wird.

Diese Andeutungen mögen genügen; der Leser wird sich nach den Sätzen in § 6 noch andere aufstellen können.

§ 9. Multiplikationstheorem.

Ein besonderer Fall für die Entwicklung einer Determinante nach Unterdeterminanten mag zuvor als Überleitung zum Multiplikationstheorem Erwähnung finden.

In der n-gliedrigen Determinante D mögen diejenigen Elemente verschwinden, in denen sich die m ersten Zeilen mit den $(n - m)$ letzten Kolonnen kreuzen. Man erkennt dann ohne weiteres, daß die Entwicklung nach m- bzw. $(n - m)$-gliedrigen Unterdeterminanten sich auf ein einziges Produkt reduziert, da die m ersten Zeilen nur eine einzige m-gliedrige Determinante enthalten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aus diesem Beispiel geht hervor, daß die Elemente, die denjenigen Zeilen und Kolonnen angehören, in denen keine verschwindende Elemente stehen, für den Wert der Determinante ohne Bedeutung sind, was für die kommenden Betrachtungen besonders wichtig ist.

Die Vertauschung der linken Seite mit der rechten in der obigen Gleichung gibt ein Hilfsmittel, das Produkt zweier beliebiger Determinanten in eine einzige zu verwandeln; es wird dies ohne weiteres aus folgendem Beispiel klar:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & d & e \\ c' & d' & e' \\ c'' & d'' & e'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & x & y & z \\ a' & b' & x' & y' & z' \\ 0 & 0 & c & d & e \\ 0 & 0 & c' & d' & e' \\ 0 & 0 & c'' & d'' & e'' \end{vmatrix},$$

wobei x, y, z, x', y', z' ganz beliebige Werte sind, die man sich je nach Bedarf passend wählen kann.

Sollen zwei beliebige Determinanten miteinander multipliziert werden, so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß beide Determinanten vom selben Grad sind; denn im andern Fall kann man nach dem Satz der Ränderung die Determinante von geringerem Grad auf den der anderen bringen.

Dementsprechend mag folgendes Produkt den weiteren Betrachtungen zugrunde gelegt werden:

$$D_a \cdot D_b = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} & 0 & & \dots & -1 \\ 0 & & \dots & 0 & b_{11} & & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \dots & 0 & b_{n1} & & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die so erhaltene $2n$-gliedrige Determinante läßt sich auf eine n-gliedrige zurückführen; zu diesem Zweck wurden bereits die willkürlichen Elemente passend gewählt.

Denkt man sich jetzt in der letzten Determinante alle Elemente der ersten Zeile mit b_{11}, alle Elemente der zweiten Zeile mit b_{12} usw., schließlich alle Elemente der n-ten Zeile mit b_{1n} multipliziert und die Summe aller so erweiterten Elemente derselben Kolonne zu dem $(n+1)$-ten Element dieser Kolonne addiert, so heißen dann die Elemente der $(n+1)$-ten Zeile von links nach rechts:

$$a_{11} b_{11} + a_{21} b_{12} + \dots + a_{n1} b_{1n} = \sum a_{j1} b_{1j}$$
$$a_{12} b_{11} + a_{22} b_{12} + \dots + a_{n2} b_{1n} = \sum a_{j2} b_{1j}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{1n} b_{11} + a_{2n} b_{12} + \dots + a_{nn} b_{1n} = \sum a_{jn} b_{1j}.$$

Alle übrigen Elemente verschwinden; die Summenbezeichnungen mögen nur zur Abkürzung dienen.

Die so veränderte $2n$-gliedrige Determinante, welche nach (11) § 6 ihren Wert nicht geändert hat, stimmt also bis auf die $(n+1)$-te Zeile, welche nunmehr die

eben erwähnten Elemente hat, mit der ursprünglichen überein.

In ganz derselben Weise verändert man jetzt die $(n+2)$-te Zeile, nur daß man sich die Elemente der n ersten Zeilen entsprechend mit $b_{21}, b_{22}, b_{23}, \ldots, b_{2n}$ multipliziert und die Summe der so erweiterten Elemente derselben Kolonne zum $(n+2)$-ten Element dieser Kolonne addiert denkt. Die Elemente der $(n+2)$-ten Zeile sind dann:

$$\begin{aligned}
a_{11} b_{21} + a_{21} b_{22} + \cdots + a_{n1} b_{2n} &= \sum a_{j1} b_{2j} \\
a_{12} b_{21} + a_{22} b_{22} + \cdots + a_{n2} b_{2n} &= \sum a_{j2} b_{2j} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{1n} b_{21} + a_{2n} b_{22} + \cdots + a_{nn} b_{2n} &= \sum a_{jn} b_{2j} ;
\end{aligned}$$

alle übrigen verschwinden wieder.

Die n ersten Zeilen entsprechend erweitert mit den Elementen der dritten Zeile von D_b führen in ähnlicher Weise zu den neuen Elementen der $(n+3)$-ten Zeile:

$$\begin{aligned}
a_{11} b_{31} + a_{21} b_{32} + \cdots + a_{n1} b_{3n} &= \sum a_{j1} b_{3j} \\
a_{12} b_{31} + a_{22} b_{32} + \cdots + a_{n2} b_{3n} &= \sum a_{j2} b_{3j} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{1n} b_{31} + a_{2n} b_{32} + \cdots + a_{nn} b_{3n} &= \sum a_{jn} b_{3j} ;
\end{aligned}$$

alle übrigen sind Null.

Behandelt man die $(n+4)$-te Zeile ebenso, indem man sich wieder die n ersten Zeilen der Reihe nach je mit den Elementen der vierten Zeile von D_b multipliziert denkt usw., ebenso die $(n+5)$-te, die $(n+6)$-te Zeile usw., so kommt man schließlich zur $2n$-ten Zeile, deren Elemente dann heißen werden:

$$\begin{aligned}
a_{11} b_{n1} + a_{21} b_{n2} + \cdots + a_{n1} b_{nn} &= \sum a_{j1} b_{nj} \\
a_{12} b_{n1} + a_{22} b_{n2} + \cdots + a_{n2} b_{nn} &= \sum a_{j2} b_{nj} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{1n} b_{n1} + a_{2n} b_{n2} + \cdots + a_{nn} b_{nn} &= \sum a_{jn} b_{nj} ,
\end{aligned}$$

alle übrigen Null.

Die so umgeformte Determinante für $D_a \cdot D_b$ hat jetzt folgendes Aussehen:

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & -1 \\
\sum a_{j1} b_{1j} & \sum a_{j2} b_{1j} & \ldots & \sum a_{jn} b_{1j} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\sum a_{j1} b_{2j} & \sum a_{j2} b_{2j} & \ldots & \sum a_{jn} b_{2j} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\sum a_{j1} b_{nj} & \sum a_{j2} b_{nj} & \ldots & \sum a_{jn} b_{nj} & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{vmatrix} .$$

Diese Determinante läßt sich sofort in das Produkt zweier Determinanten zerlegen:

$$(-1)^{\lambda} \begin{vmatrix}
\sum a_{j1} b_{1j} & \ldots & \sum a_{jn} b_{1j} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\sum a_{j1} b_{nj} & \ldots & \sum a_{jn} b_{nj}
\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
-1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & -1 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & -1
\end{vmatrix} .$$

Die zweite Determinante hat den Wert $(-1)^n$; es gilt nun, λ zu bestimmen. λ gibt die Summe der Zahlen an, welche die Zeilen und Kolonnen charakterisieren, die unterdrückt werden müssen, damit die aus jenen Summen gebildete Unterdeterminante übrigbleibt. Es kommen die

1, 2, ..., n-te Zeile und $(n+1)$, $(n+2)$, ..., $2n$-te Kolonne in Betracht, so daß:

$$\lambda = \frac{n}{2}(n+1) + n^2 + \frac{n}{2}(n+1) = n + 2n^2;$$

folglich ist:

$$(-1)^\lambda = (-1)^{n+2n^2},$$
$$(-1)^\lambda \cdot (-1)^n = (-1)^{2n+2n^2} = +1.$$

Man kommt also zu dem Ergebnis, daß das Produkt $D_a \cdot D_b$ sich auf die aus jenen Summen gebildete Determinante reduziert.

Vertauscht man in dieser Summendeterminante noch die Zeilen mit den Kolonnen, so hat man:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \sum a_{j1} b_{1j} & \sum a_{j1} b_{2j} & \cdots & \sum a_{j1} b_{nj} \\ \sum a_{j2} b_{1j} & \sum a_{j2} b_{2j} & \cdots & \sum a_{j2} b_{nj} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum a_{jn} b_{1j} & \sum a_{jn} b_{2j} & \cdots & \sum a_{jn} b_{nj} \end{vmatrix}.$$

In dieser Form läßt sich das Gesetz der Bildung der Produktdeterminante recht gut erkennen. Die vier Indizes unter dem Summenzeichen eines jeden Elementes folgen derart aufeinander, daß der erste und letzte j ist, und daß die beiden inneren diejenigen sind, welche in D_a oder D_b das entsprechende Element an derselben Stelle besitzt.

Sind somit zwei numerisch gegebene Determinanten D_1 und D_2 vorgelegt, dann wird irgend ein Element der Produktdeterminante, z. B. das der i-ten Zeile und der k-ten Kolonne, dadurch gebildet, daß man das erste Element der i-ten Zeile von D_1 multipliziert mit dem ersten Element der k-ten Kolonne von D_2, dann das zweite Element der i-ten Zeile von D_1 mit dem zweiten Element der k-ten Kolonne von D_2 usw., schließlich das n-te Element der i-ten Zeile von D_1 mit dem n-ten Element der k-ten Kolonne von D_2 und alle diese Produkte addiert.

Um dieses Bildungsgesetz noch deutlicher hervortreten zu lassen, empfiehlt es sich, den von Graßmann eingeführten Begriff des inneren Produktes zu verwerten.

Liegen zwei Systeme von je n Zahlen:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n,$$
$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$$

in bestimmter Reihenfolge vor, so nennt man den Ausdruck:

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \ldots + \alpha_n\beta_n$$

das innere Produkt der beiden Systeme und bezeichnet es kurz durch:

$$(\alpha\beta).$$

Hiernach können die obigen Summen, als die sich die Elemente der Produktdeterminante darstellen, alle als innere Produkte aufgefaßt werden; so z. B. ist das Element (es werde durch c_{ik} bezeichnet) der i-ten Zeile und der k-ten Kolonne in der Produktdeterminante dann das innere Produkt aus den Elementen der i-ten Zeile von D_a und den Elementen der k-ten Kolonne von D_b. Nach der obigen Summendarstellung ist:

$$c_{ik} = \sum a_{ji} b_{kj}.$$

Die Summe ist zu erstrecken über alle Produkte $a_{ji} b_{kj}$ von $j = 1, 2, 3 \ldots$ bis n; man drückt dies aus durch:

$$c_{ik} = \sum_j a_{ji} b_{kj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$= a_{1i} b_{k1} + a_{2i} b_{k2} + \ldots + a_{ni} b_{kn}.$$

Man nennt diese c_{ik} Kompositionen der a_{ik} und b_{ik} (Anwendung: Kompositionen von Drehungen).

Vertauscht man in D_b die Kolonnen mit den Zeilen, so kann sich natürlich D_b, also auch $D_a \cdot D_b$ nicht ändern. In c_{ik} hätte man dann dasselbe zu tun; dies führt aber sofort zu einer zweiten Möglichkeit, die Produktdeterminante zu bilden, nämlich c_{ik} stellt sich dann als inneres Produkt der Elemente der i-ten Zeile in D_a mit denen der k-ten Zeile in D_b dar. Vertauscht man weiterhin in D_a und D_b Zeilen und Kolonnen, so würde man eine dritte Bildungsmöglichkeit (inneres Produkt der Kolonnen!) erhalten; eine vierte Bildungsmöglichkeit liegt dann noch in der Produktbildung der Kolonnen von D_a und der Zeilen von D_b.

Folgendes Beispiel mag die verschiedenen Arten der Produktbildung zweier Determinanten näher erkennen lassen:

$$D_a \cdot D_\alpha = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + b_1 \alpha_2 & a_1 \beta_1 + b_1 \beta_2 \\ a_2 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 & a_2 \beta_1 + b_2 \beta_2 \end{vmatrix}$$

(Zeilen von D_a mit Kolonnen von D_α)

$$= \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 & a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 \\ a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 & a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 \end{vmatrix}$$

(Zeilen von D_a mit Zeilen von D_α)

$$= \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 & a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 \\ b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 & b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 \end{vmatrix}$$

(Kolonnen von D_a mit Kolonnen von D_α)

$$= \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + a_2 \beta_1 & a_1 \alpha_2 + a_2 \beta_2 \\ b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_1 & b_1 \alpha_2 + b_2 \beta_2 \end{vmatrix}$$

(Kolonnen von D_a mit Zeilen von D_α).

Mit Hilfe von c_{ik} lassen sich die vier Bildungsmöglichkeiten nach der Kroneckerschen Schreibweise darstellen durch:

$$|a_{ik}| \cdot |b_{ik}| = |c_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

wo:

$$\left.\begin{aligned} c_{ik} &= \sum_j a_{ji} b_{kj} = \sum_j a_{ji} b_{jk} \\ &= \sum_j a_{ij} b_{kj} = \sum_j a_{ij} b_{jk} \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Beispiele:

1. Man zeige, daß:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(bc - ad).$$

2. Sind:

$$\begin{matrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{matrix}$$

die Richtungskosinus von drei aufeinander senkrecht stehenden Geraden l_1, l_2, l_3 durch den Koordinatenanfangspunkt bezüglich der Koordinatenachsen, so ist die Determinante dieser neun Größen ihrem Werte nach ± 1.

Den Nachweis führt man dadurch, daß man von der Determinante das Quadrat bildet und von ihm zeigt, daß es den Wert $+1$ hat. Man hat die beiden Sätze zu wissen, daß das innere Produkt der Richtungskosinus zweier senkrecht

aufeinander stehender Geraden verschwindet, und daß die Summe der Quadrate der Richtungskosinus einer Geraden den Wert +1 hat.

3. Hat man zwei Determinanten verschiedener Ordnung zu multiplizieren, so wird man diejenige niederer Ordnung nach § 7 leicht auf dieselbe Ordnung der anderen bringen und dann den Multiplikationssatz anwenden können. Man zeige, daß:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 & c_1 & d_1 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 & c_2 & d_2 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 & c_3 & d_3 \\ a_4\alpha_1 + b_4\beta_1 & a_4\alpha_2 + b_4\beta_2 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

4. Zur weiteren Übung mag die allgemeine Ableitung der Produktbildung analog der gegebenen Darstellung für:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

durchgebildet werden.

Sollen mehrere Determinanten miteinander multipliziert werden, so kann man zunächst die beiden ersten multiplizieren und dann diese Produktdeterminante mit der dritten usw., so daß man allgemein sagen kann:

Sind beliebig viele Determinanten miteinander zu multiplizieren, so läßt sich ihr Produkt als eine einzige Determinante darstellen, welche dieselbe Ordnung aufweist wie diejenige der gegebenen Determinanten, welche von der höchsten Ordnung ist. Die Elemente der Produktdeterminante sind ganze rationale Funktionen der Elemente der gegebenen Determinanten.

Schließlich mag noch hervorgehoben werden, daß Binet und Cauchy die Multiplikationsregel für Determinanten zum ersten Male ausgesprochen haben; beide Mathematiker haben fußen können auf besonderen Fällen, die bereits von Lagrange und Gauß angegeben waren.

Man kann auch zwei Matrizen miteinander multiplizieren, indem man sie durch Nullen zu quadratischen Matrizen erweitert und dann genau wie bei Determinanten verfährt.

Schreibt man die quadratische Matrix der Produktelemente zwischen zwei vertikale Striche, so hat man natürlich Null, was man der Produktdeterminante meistens nicht ansieht. Man kann also auf diese Weise zu neuen Formeln kommen; der Leser versäume nicht, diese Übungsmöglichkeit auszunützen.

III. Anwendungen der Determinanten.

§ 10. Lineare Gleichungen.

In der Einleitung wurde bereits erwähnt, daß die Determinantentheorie ihre Entstehung der Auflösung von linearen Gleichungen verdankt. Auch heute noch muß die Anwendung der Determinanten zur Lösung solcher Gleichungen als die wichtigste für die ganze Mathematik angesehen werden.

Wir wenden uns den schon mehrfach begegneten drei Gleichungen mit drei Unbekannten in der Einleitung zu, und zwar in der S. 22 gegebenen Darstellung:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = m_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = m_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = m_3,$$

um sie nach einer anderen Methode als in § 1 zu lösen, die sich mit Hilfe der Determinanten wird ohne weiteres verallgemeinern lassen.

Es werde:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

die Determinante des Systems der obigen drei linearen Gleichungen genannt.

Multipliziert man jetzt die drei Gleichungen je mit den Unterdeterminanten der Elemente der ersten Kolonne von D, und zwar die erste mit A_{11}, die zweite mit A_{21} und die dritte mit A_{31}, um dann alle drei zu addieren, so erhält man:

$$\begin{aligned} & x_1(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}) \\ + & x_2(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}) \\ + & x_3(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}) \\ = & \quad m_1 A_{11}+m_2 A_{21}+m_3 A_{31}\,. \end{aligned}$$

Nach Satz 6 (§ 7) ist der Koeffizient von x_1 gleich D, die Koeffizienten von x_2 und x_3 verschwinden, und der Ausdruck auf der rechten Seite ist eine Determinante, die man aus D erhält, falls man dort die Elemente der ersten Kolonne, also a_{11}, a_{21}, a_{31} ersetzt durch m_1, m_2, m_3. Hiernach bekommt man:

$$x_1 = \frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix} m_1 & a_{12} & a_{13} \\ m_2 & a_{22} & a_{23} \\ m_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Beachte, daß $D \neq 0$ sein muß!

Um x_2 zu bekommen, erweitert man die gegebenen drei Gleichungen mit den entsprechenden Unterdeterminanten der Elemente der zweiten Kolonne, also die erste Gleichung mit A_{12}, die zweite mit A_{22}, die dritte mit A_{32} und addiert wieder. Führt man dies näher aus, so ergibt sich wieder unter Beachtung jenes Satzes 6 (§ 7):

$$x_2 = \frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & m_1 & a_{13} \\ a_{21} & m_2 & a_{23} \\ a_{31} & m_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ebenso bekommt man durch Multiplikation mit A_{13}, A_{23}, A_{33} und Addition schließlich:

$$x_3 = \frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & m_3 \end{vmatrix}.$$

Mit Hilfe der Bezeichnungsweise der Summendarstellung, wie sie öfters schon gebraucht wurde, kann man diese Ausführungen kürzer darstellen. Die drei Gleichungen lassen sich schreiben:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = m_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

oder noch kürzer:

$$\sum_k a_{ik}x_k = m_i \qquad (i, k = 1, 2, 3)\,.$$

Das soll also heißen, man schreibt die Summe von drei Gliedern $a_{ik}x_k$ hin, wo einmal $k = 1$, dann $= 2$ und schließlich $= 3$ gesetzt wird; dadurch hat man die linke Seite der darüberstehenden Gleichung, diese schreibt man einmal für $i = 1$, dann für $i = 2$ und schließlich für $i = 3$ hin. Die erhaltenen drei Gleichungen sind dann die obigen.

Führt man jetzt wieder die oben näher bezeichneten Multiplikationen mit den Unterdeterminanten der ersten, zweiten und dritten Kolonne und die jedesmalige Addition der drei Gleichungen aus, so lassen sich die drei Gleichungen für x_1, x_2, x_3 schreiben:

$$\begin{aligned} x_1\cdot\sum_i a_{i1}A_{i1} + x_2\cdot\sum_i a_{i2}A_{i1} + x_3\cdot\sum_i a_{i3}A_{i1} &= \sum_i m_i A_{i1} \\ x_1\cdot\sum_i a_{i1}A_{i2} + x_2\cdot\sum_i a_{i2}A_{i2} + x_3\cdot\sum_i a_{i3}A_{i2} &= \sum_i m_i A_{i2} \\ x_1\cdot\sum_i a_{i1}A_{i3} + x_2\cdot\sum_i a_{i2}A_{i3} + x_3\cdot\sum_i a_{i3}A_{i3} &= \sum_i m_i A_{i3} \end{aligned}$$

(überall $i = 1, 2, 3$).

Auch diese Gleichungen könnte man kürzer schreiben; es hat dies aber wenig Zweck, weil von den neun Summen links nach Satz 6 (§ 7) sechs verschwinden, so daß die Gleichungen heißen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 \sum_i a_{i1} A_{i1} &= \sum_i m_i A_{i1} \\ x_2 \sum_i a_{i2} A_{i2} &= \sum_i m_i A_{i2} \\ x_3 \sum_i a_{i3} A_{i3} &= \sum_i m_i A_{i3} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Aber auch diese drei Gleichungen kann man wieder kürzer schreiben:

$$x_k \sum_i a_{ik} A_{ik} = \sum_i m_i A_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Die Auflösungen dieser drei Gleichungen sind dann:

$$x_1 = \frac{\sum_i m_i A_{i1}}{\sum_i a_{i1} A_{i1}}, \qquad x_2 = \frac{\sum_i m_i A_{i2}}{\sum_i a_{i2} A_{i2}},$$

$$x_3 = \frac{\sum_i m_i A_{i3}}{\sum_i a_{i3} A_{i3}} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

oder kürzer:

$$x_k = \frac{\sum_i m_i A_{ik}}{\sum_i a_{ik} A_{ik}} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Dies sind dieselben Werte, die oben in Determinantenform angegeben wurden.

Nachdem diese Summendarstellungen an einem besonderen Beispiel genügend eingeführt sind, werden die folgenden Betrachtungen über Auflösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten bei einiger Mühe bald verstanden werden.

Vorgelegt seien die n Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik} x_k = m_i \qquad (i, k = 1, 2, 3 \ldots n),$$

deren Determinante also ist (vgl. S. 78):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{und} \neq 0.$$

Multipliziert man diese n Gleichungen mit den Unterdeterminanten der Elemente der ersten Kolonne von D und addiert sie, verfährt man ein zweites Mal genau so, aber mit den Unterdeterminanten der Elemente der zweiten Kolonne usw., schließlich ein n-tes Mal mit den Unterdeterminanten der n-ten Kolonne, so erhält man unter Beachtung von Satz 6 (§ 7) die n Gleichungen:

$$x_k \sum_i a_{ik} A_{ik} = \sum_i m_i A_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3 \ldots n),$$

welche nach den Unbekannten aufgelöst ergeben:

$$x_k = \frac{\sum_i m_i A_{ik}}{\sum_i a_{ik} A_{ik}} \qquad (i, k = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Hierbei sind die Nenner alle gleich D, der Determinante des Systems. Ferner erkennt man, daß die Zähler (analog wie S. 27) ebenfalls alle als Determinanten geschrieben werden können; man erhält den Zähler von x_1, wenn man in D die Elemente der ersten Kolonne durch $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ersetzt, den Zähler von x_2, wenn man in D die Elemente der zweiten Kolonne durch $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ersetzt usw., schließlich den Zähler von x_n, wenn man in D die Elemente der

letzten Kolonne durch $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ersetzt (Regel von Cramer).

Die Lösungen können jetzt geschrieben werden:

$$x_1 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_1}{D},$$

$$x_2 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & m_1 & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & m_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_2}{D},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_n = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & m_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & m_n \end{vmatrix} = \frac{D_n}{D}.$$

(Der Leser mag einige Zahlenbeispiele aus irgendwelcher arithmetischen Aufgabensammlung mit Hilfe der Determinanten lösen.)

Liegt ein System von linearen Gleichungen vor, in dem die Anzahl der Unbekannten nicht mit der der Gleichungen übereinstimmt, so spielen bei den Untersuchungen der eventuellen gemeinsamen Lösungen usw. die Matrizen eine wichtige Rolle; darauf kann jedoch nicht näher eingegangen werden*).

Ein System von n linearen Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten nennt man **homogen**, sobald die von den Unbekannten freien Glieder, also im obigen System die n Größen m_1 bis m_n, verschwinden:

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n = 0.$$

*) Vgl. hierzu Netto oder Pascal.

Als selbstverständliche Lösungen erkennt man sofort:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Ein solches homogenes lineares Gleichungssystem kann jedoch auch Lösungen aufweisen, die nicht sämtlich verschwinden; dies mag für den Fall gezeigt werden, daß die Determinante D vom Range $n-1$ ist.

Jede Gleichung des vorgelegten Systems durch x_n dividiert gibt:

$$a_{11} \frac{x_1}{x_n} + \ldots + a_{1,n-1} \frac{x_{n-1}}{x_n} = -a_{1n}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{n1} \frac{x_1}{x_n} + \ldots + a_{n,n-1} \frac{x_{n-1}}{x_n} = -a_{nn}.$$

Die ersten $(n-1)$ Gleichungen, nach den $(n-1)$ Unbekannten $\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$ aufgelöst, geben z. B. für

$$\frac{x_k}{x_n} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1n} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,n} & a_{n-1,k+1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$
$$: \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Den Divisor erkennt man ohne weiteres als die Unterdeterminante A_{nn} von a_{nn} in

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

In der ersten Determinante läßt man eine zyklische Vertauschung der $(n-k)$ letzten Kolonnen eintreten

($n-k-1$ Zeichenwechsel!). Dann kann die so umgeänderte Determinante als Unterdeterminante A_{nk} aufgefaßt werden, falls man sie sich noch mit $(-1)^{n+k}$ multipliziert denkt. Jetzt steht vor der ersten Determinante der Faktor $(-1)\cdot(-1)^{n-k-1}\cdot(-1)^{n+k}=+1$, und man kann schreiben:

$$\frac{x_k}{x_n}=\frac{A_{nk}}{A_{nn}}.$$

Läßt man k alle möglichen Werte von 1 bis $n-1$ annehmen, so hat man die gesuchten Lösungen des veränderten Systems, woraus sich aber sofort für die Unbekannten des gegebenen Systems ableiten läßt:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_{n1} : A_{n2} : \ldots : A_{nn}$$

oder

$$x_1=\lambda A_{n1}, \quad x_2=\lambda A_{n2}, \quad \ldots, \quad x_n=\lambda A_{nn},$$

wo λ eine ganz beliebige Zahl sein kann.

Die Division jeder Gleichung durch x_n ist nur ein spezieller Fall: hätte man durch ein beliebiges x, durch x_k, dividiert, so würde man als proportionale Größen zu den Unbekannten die Unterdeterminanten der k-ten Zeile von D erhalten haben, so daß man also folgende Lösungen erkennt:

$$\begin{aligned}
&x_1=\lambda A_{11}, \quad x_2=\lambda A_{12}, \quad \ldots, \quad x_n=\lambda A_{1n}\\
\text{oder}\quad &x_1=\lambda A_{21}, \quad x_2=\lambda A_{22}, \quad \ldots, \quad x_n=\lambda A_{2n}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\text{oder}\quad &x_1=\lambda A_{n1}, \quad x_2=\lambda A_{n2}, \quad \ldots, \quad x_n=\lambda A_{nn}.
\end{aligned}$$

Setzt man die Lösungen z. B. der letzten Zeile in das vorgelegte Gleichungssystem ein, so werden die

ersten $(n-1)$ Gleichungen identisch befriedigt, während man für die letzte erhält:

$$\lambda \sum a_{nk} A_{nk} = \lambda D = 0;$$

demnach muß zu den obigen Lösungen noch die Bedingung

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

treten, so daß man schließlich sagen kann:

Als Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems von n Unbekannten sind die mit einer beliebigen, aber für alle Unbekannten gleichen Zahl multiplizierten Unterdeterminanten der n Elemente irgend einer Zeile oder Kolonne der Determinante D des Systems anzusehen, falls diese Determinante verschwindet, aber vom Range $n-1$ ist; ist $D=0$, so gibt es nur die Lösungen:

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0.$$

Hieraus folgen die beiden Sätze:

Ein homogenes lineares System von n Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten wird nur dann von einem System endlicher, nicht verschwindender Werte für diese Unbekannten befriedigt, falls die Determinante des Systems verschwindet.

Ein nicht homogenes lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit $(n-1)$ Unbekannten kann nur dann von demselben System von $(n-1)$ Werten für diese Unbekannten befriedigt werden, wenn die Determinante aller Koeffizienten verschwindet. (Beweis durch Zurückführung auf den vorhergehenden Fall: $x_1=\frac{x_1'}{x_n'}$, $x_2=\frac{x_2'}{x_n'}, \ldots, x_{n-1}=\frac{x_{n-1}'}{x_n'}$.)

Um eine Anwendung des zweiten dieser beiden Sätze zu geben, mag noch kurz eingegangen werden auf die Resultante von zwei Gleichungen höheren Grades, welche durch ihr Verschwinden anzeigt, daß die beiden Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen.

Gegeben sind die beiden Gleichungen:

$$a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0$$
$$a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 = 0 .$$

Bedeutet x die beiden Gleichungen gemeinschaftliche Wurzel, so mögen folgende fünf Gleichungen gebildet werden:

$$\begin{aligned} a_1 x^2 + b_1 x + c_1 &= 0 \\ a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x &= 0 \\ a_1 x^4 + b_1 x^3 + c_1 x^2 &= 0 \\ a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 &= 0 \\ a_2 x^4 + b_2 x^3 + c_2 x^2 + d_2 x &= 0 . \end{aligned}$$

Sollen diese fünf Gleichungen gleichzeitig für x oder, was dasselbe ist, für die vier Unbekannten x, x^2, x^3, x^4 bestehen, so muß nach früheren Betrachtungen folgende Determinante verschwinden:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Bézout nannte diese Gleichung (S. 10) „équation résultante“, und danach nennt man diese Determinante die Resultante der beiden vorgelegten Gleichungen höheren Grades; ihr Verschwinden gibt also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß die beiden gegebenen höheren Gleichungen mindestens eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen.

Nach diesen Betrachtungen kann man sich ohne weiteres die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufstellen, daß eine beliebige Gleichung n-ten mit einer anderen m-ten Grades mindestens eine gemeinschaftliche Wurzel hat. Die Resultante hat dann die Form einer $(n + m)$-gliedrigen Determinante. Die Art und Weise dieses Verfahrens wird die dialytische Methode Sylvesters genannt.

Die dialytische Methode kann mit Vorteil angewendet werden, wenn es sich um die Auflösung zweier quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten handelt (vgl. Sporer).

Sind z. B. gegeben die beiden Gleichungen:

$$a x^2 + b y^2 + c x y + d x + e y + f = 0$$
$$a' x^2 + b' y^2 + c' x y + d' x + e' y + f' = 0 ,$$

so schreibt man dieselben:

$$a x^2 + (c y + d) x + (b y^2 + e y + f) = 0$$
$$a' x^2 + (c' y + d') x + (b' y^2 + e' y + f') = 0$$

oder einfacher:

$$A x^2 + B x + C = 0$$
$$A' x^2 + B' x + C' = 0 ,$$

woraus die vier Gleichungen folgen:

$$\begin{aligned} A x^3 + B x^2 + C x &= 0 \\ A x^2 + B x + C &= 0 \\ A' x^3 + B' x^2 + C' x &= 0 \\ A' x^2 + B' x + C' &= 0 . \end{aligned}$$

Für das gleichzeitige Bestehen dieser vier Gleichungen muß die Determinante, die man in diesem Falle Eliminante nennt (vgl. Netto), verschwinden:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ 0 & A & B & C \\ A' & B' & C' & 0 \\ 0 & A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0 .$$

Dies ist eine Gleichung vierten Grades für y, wodurch andererseits wieder x bestimmt ist.

Um eine Anwendung des zweiten dieser beiden Sätze zu geben, mag noch kurz eingegangen werden auf die Resultante von zwei Gleichungen höheren Grades, welche durch ihr Verschwinden anzeigt, daß die beiden Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen.

Gegeben sind die beiden Gleichungen:

$$a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0$$
$$a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 = 0 .$$

Bedeutet x die beiden Gleichungen gemeinschaftliche Wurzel, so mögen folgende fünf Gleichungen gebildet werden:

$$\begin{aligned} a_1 x^2 + b_1 x + c_1 &= 0 \\ a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x &= 0 \\ a_1 x^4 + b_1 x^3 + c_1 x^2 &= 0 \\ a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 &= 0 \\ a_2 x^4 + b_2 x^3 + c_2 x^2 + d_2 x &= 0 . \end{aligned}$$

Sollen diese fünf Gleichungen gleichzeitig für x oder, was dasselbe ist, für die vier Unbekannten x, x^2, x^3, x^4 bestehen, so muß nach früheren Betrachtungen folgende Determinante verschwinden:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Bézout nannte diese Gleichung (S. 10) „équation résultante", und danach nennt man diese Determinante die Resultante der beiden vorgelegten Gleichungen höheren Grades; ihr Verschwinden gibt also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß die beiden gegebenen höheren Gleichungen mindestens eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen.

Nach diesen Betrachtungen kann man sich ohne weiteres die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufstellen, daß eine beliebige Gleichung n-ten mit einer anderen m-ten Grades mindestens eine gemeinschaftliche Wurzel hat. Die Resultante hat dann die Form einer $(n + m)$-gliedrigen Determinante. Die Art und Weise dieses Verfahrens wird die dialytische Methode Sylvesters genannt.

Die dialytische Methode kann mit Vorteil angewendet werden, wenn es sich um die Auflösung zweier quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten handelt (vgl. Sporer).

Sind z. B. gegeben die beiden Gleichungen:

$$a x^2 + b y^2 + c x y + d x + e y + f = 0$$
$$a' x^2 + b' y^2 + c' x y + d' x + e' y + f' = 0 ,$$

so schreibt man dieselben:

$$a x^2 + (c y + d) x + (b y^2 + e y + f) = 0$$
$$a' x^2 + (c' y + d') x + (b' y^2 + e' y + f') = 0$$

oder einfacher:

$$A x^2 + B x + C = 0$$
$$A' x^2 + B' x + C' = 0 ,$$

woraus die vier Gleichungen folgen:

$$\begin{aligned} A x^3 + B x^2 + C x &= 0 \\ A x^2 + B x + C &= 0 \\ A' x^3 + B' x^2 + C' x &= 0 \\ A' x^2 + B' x + C' &= 0 . \end{aligned}$$

Für das gleichzeitige Bestehen dieser vier Gleichungen muß die Determinante, die man in diesem Falle Eliminante nennt (vgl. Netto), verschwinden:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ 0 & A & B & C \\ A' & B' & C' & 0 \\ 0 & A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0 .$$

Dies ist eine Gleichung vierten Grades für y, wodurch andererseits wieder x bestimmt ist.

Beispiel:

$$x^2 - 2xy + 3x + 2 = 0$$
$$-y^2 + 2xy + x - y - 2 = 0 .$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2y+3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2y+3 & 2 \\ 0 & 2y+1 & -(y^2+y+2) & 0 \\ 0 & 0 & 2y+1 & -(y^2+y+2) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$3y^4 - 2y^3 - 12y^2 - 23y - 12 = 0 \quad \text{usw.}$$

Schließlich mag noch auf eine besondere Anwendung der Resultante verwiesen werden.

Liegt eine Gleichung:

$$f(x) = a x^n + b x^{n-1} + \ldots = 0$$

vor, so kann man $f(x)$ ausdrücken durch die n Wurzeln α_1, α_2 ..., α_n:

$$f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) .$$

Besitzt $f(x) = 0$ eine Doppelwurzel $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, ist also:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 (x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n) ,$$

so muß $f'(x)$ den Faktor $(x - \alpha)$ enthalten, d. h. die beiden Gleichungen:

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad f'(x) = 0$$

haben eine gemeinsame Wurzel.

Umgekehrt muß die Resultante der beiden Gleichungen $f(x) = 0$ und $f'(x) = 0$ verschwinden, falls $f(x)$ eine Doppelwurzel haben soll. In diesem Fall nennt man die Resultante, die ja von der Gleichung $f(x) = 0$ allein abhängig ist, die

Diskriminante der Gleichung $f(x) = 0$.

Ihr Verschwinden ist also die Bedingung dafür, daß die vorgelegte Gleichung eine Doppelwurzel aufweist.

§ 11. Lineare Substitutionen.

In engem Zusammenhang mit den linearen Gleichungen stehen die linearen Substitutionen.

Sollen in irgendeiner oder in mehreren Funktionen mit den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für diese Veränderlichen lineare Ausdrücke gesetzt werden, die von n neuen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in folgender Weise abhängen:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n \\ x_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n , \end{aligned}$$

so nennt man dies eine lineare Substitution*) (auch Transformation) und die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

die Substitutionsdeterminante oder den Modul. Letztere muß immer von Null verschieden sein, da sonst hierdurch eine Abhängigkeit der x bestimmt wäre. Ist diese Determinante die Einheitsdeterminante, so ist die Substitution die identische oder Einheitssubstitution.

Will man umgekehrt die y durch die x ausdrücken, so verfährt man wie früher und erhält z. B.:

$$y_k = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & x_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & x_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} ,$$

oder anders geschrieben:

$$D \cdot y_k = A_{1k} x_1 + A_{2k} x_2 + \ldots + A_{nk} x_n ,$$

so daß die zu der gegebenen inverse Substitution heißen würde:

---

*) Man vergleiche hierzu § 7 aus „Koordinatensysteme" des Verfassers (Sammlung Göschen Bd. 507).

$$
\begin{aligned}
D y_1 &= A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + \ldots + A_{1n} x_n \\
D y_2 &= A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + \ldots + A_{2n} x_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
D y_n &= A_{n1} x_1 + A_{n2} x_2 + \ldots + A_{nn} x_n .
\end{aligned}
$$

Für $D = 1$ nennt man nach Sylvester die lineare Substitution unimodular.

Mit Hilfe der kurzen Summendarstellung können wir also sagen: Die zu:

$$x_i = \sum_k a_{ik} y_k \qquad (i, k = 1, 2, 3 \ldots n)$$

inverse Substitution heißt:

$$y_k = \frac{1}{D} \cdot \sum_i A_{ik} x_i \qquad (i, k = 1, 2, 3 \ldots n) .$$

Sollen durch die lineare Substitution:

$$x_i = \sum_k a_{ik} y_k \qquad i, k = 1, 2 \ldots n)$$

die linearen Funktionen:

$$f_j = \sum_i b_{ji} x_i \qquad (j, i = 1, 2 \ldots n)$$

transformiert werden, so müssen in den unteren Gleichungen die x durch die Ausdrücke in den oberen Gleichungen ersetzt werden. Führt man dies vielleicht für f_2 durch und ordnet man nach den y, so ergeben sich als Koeffizienten dieser y gewisse innere Produkte, die gebildet sind aus den Elementen der Kolonnen der Substitutionsdeterminante $| a_{ik} |$ und den Elementen der zweiten Zeile von $| b_{ji} |$:

$$f_2 = c_{12} y_1 + c_{22} y_2 + \ldots + c_{n2} y_n ,$$

wo

$$c_{k2} = a_{1k} b_{21} + a_{2k} b_{22} + \ldots + a_{nk} b_{2n} ,$$
$$(k = 1, 2 \ldots n) .$$

Mit Hilfe der Summendarstellung gestaltet sich die Lösung folgenderweise:

$$\left.\begin{aligned} f_j &= \sum_i b_{ji} \Big(\sum_k a_{ik} y_k \Big) \\ &= \sum_{i,k} a_{ik} b_{ji} y_k = \sum_k y_k \Big(\sum_i a_{ik} b_{ji} \Big) \end{aligned}\right\} \quad (j, i, k = 1, 2 \ldots n) .$$

Hierin ist die Klammer nach S. 73 f. das allgemeine Glied c_{kj} der Produktdeterminante

$$| a_{ik} | \cdot | b_{ji} | ,$$

so daß:

$$f_j = \sum_i c_{kj} y_k \qquad (j, i, k = 1, 2 \ldots n) .$$

Man kann somit sagen:

Transformiert man ein System von linearen Formen, wie man die n Funktionen $f_1 \ldots f_n$ auch nennt, linear, so ist die Determinante des transformierten Systems gleich der Determinante des ursprünglichen Systems multipliziert mit dem Modul der Transformation.

Eine besondere Rolle unter den linearen Transformationen oder Substitutionen spielen die orthogonalen Substitutionen.

Wir bilden die Quadrate von den drei Werten:

$$x_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + a_{i3} y_3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und addieren folgende drei Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
x_i^2 = a_{i1}^2 y_1^2 + a_{i2}^2 y_2^2 + a_{i3}^2 y_3^2 \\
+ 2 a_{i1} a_{i2} y_1 y_2 + 2 a_{i1} a_{i3} y_1 y_3 + 2 a_{i2} a_{i3} y_2 y_3 \\
(i = 1, 2, 3) .
\end{aligned}
$$

Soll dann sich ergeben:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 ,$$

so müssen gewisse Beziehungen zwischen den a bestehen, die sich aus den drei Gleichungen:

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i a_{i1}^2 y_1^2 + \ldots \qquad (i = 1, 2, 3)$$

dadurch ergeben, daß die Koeffizienten der Quadrate der y gleich 1 und die Koeffizienten der Produkte $y_i y_k$ verschwinden müssen:

$$a_{1i} a_{1k} + a_{2i} a_{2k} + a_{3i} a_{3k} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = k \\ 0 \text{ für } i \neq k \end{cases} (i, k = 1, 2, 3) .$$

Hieraus findet man durch Verallgemeinerung den Satz (Euler):

Soll die Substitution:

$$x_i = \sum_k a_{ik} y_k \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

die Summe der Quadrate der x überführen in die Summe der Quadrate der y, soll also werden:

$$\sum_i x_i^2 = \sum_k y_k^2 \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n),$$

so müssen die Koeffizienten a der obigen Substitution folgenden Bedingungen unterliegen:

$$\sum_i a_{ir} a_{is} = \begin{cases} 1, & \text{für } r = s \\ 0, & \text{für } r \neq s \end{cases} \qquad (i, r, s = 1, 2 \ldots n)$$

oder ausführlicher:

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \ldots + a_{ni}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

und

$$a_{1i} a_{1k} + a_{2i} a_{2k} + \ldots + a_{ni} a_{nk} = 0$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots n \quad \text{aber} \quad i \neq k).$$

Solche Substitutionen werden orthogonale genannt. Die letzten Überlegungen geben ohne weiteres noch den folgenden Satz (Jacobi):

Das Quadrat der Determinante einer orthogonalen Substitution oder, wie man auch sagt, einer orthogonalen Determinante ist die Einheitsdeterminante, also gleich 1, so daß die orthogonale Determinante selbst gleich $+1$ oder -1 ist.

Man denke sich jetzt die orthogonale Substitution:

$$x_i = \sum_k a_{ik} y_k \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

wirklich hingeschrieben und diese n Gleichungen einzeln mit den Elementen a_{i1} der ersten Kolonne von $|a_{ik}|$ multipliziert und dann addiert. Dasselbe führe man aus mit den Elementen der zweiten Kolonne usw. bis zur n-ten Kolonne. Für die k-te Kolonne wird man erhalten:

$$a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 + \ldots + a_{nk} x_n$$
$$= y_1(a_{11} a_{1k} + \ldots + a_{n1} a_{nk}) + \ldots + y_n(a_{1n} a_{1k} + \ldots + a_{nn} a_{nk})$$

worin der Koeffizient von y_k gleich 1 ist und die andern verschwinden, da eben die obige Substitution orthogonal sein soll.

Wir erhalten also für alle möglichen k:

$$y_k = \sum_i a_{ik} x_i \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n).$$

S. 90 haben wir für die Auflösung der obigen Gleichungen nach den y erhalten:

$$y_k = \frac{1}{D} \cdot \sum_i A_{ik} x_i \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n),$$

woraus sich für die Unterdeterminanten der orthogonalen Determinante $|a_{ik}|$ ergibt (Cauchy u. Jacobi):

$$A_{ik} = +a_{ik} \quad \text{bei} \quad |a_{ik}| = +1$$
$$A_{ik} = -a_{ik} \quad \text{,,} \quad |a_{ik}| = -1.$$

Eine Koordinatentransformation in der Ebene derart, daß der Nullpunkt unverändert bleibt, muß bekanntlich die Entfernung eines Punktes von demselben ebenfalls unverändert lassen:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2,$$

d. h. die Transformation muß eine orthogonale sein. Der Leser untersuche dies selbst weiter.

Im Raum ist der Zusammenhang zweier Systeme mit demselben Nullpunkt ebenfalls eine orthogonale Substitution:

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z,$$
$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z,$$
$$z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z,$$

denn es muß sein:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Die Größen a, b, c sind hier die Richtungskosinus der neuen Achsen bezüglich der alten, und die Gleichungen, die zwischen ihnen bestehen, sind dieselben wie die Bedingungsgleichungen zwischen den Elementen der Substitutionsdeterminante, damit diese orthogonal ist*). (Vgl. S. 75.)

*) Vergleiche hierzu: Sammlung Göschen Bd. 507 § 4.

§ 12. Einige geometrische Anwendungen.

Besonders fruchtbar hat sich die Lehre von den Determinanten für die analytische Geometrie erwiesen. Auch hier sind es vor allem Gleichungen, durch die ja die verschiedenen ebenen und räumlichen Gebilde dargestellt werden, welche eine Anwendung der Determinanten nahelegen. Es mögen zur weiteren Erläuterung der Lehre von den Determinanten aus dem großen Gebiet der analytischen Geometrie einige Aufgaben behandelt werden.

Die Gleichungen dreier Geraden sind:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \\ a''x + b''y + c'' &= 0 . \end{aligned}$$

Sollen sich diese drei Geraden in einem Punkt schneiden, so müssen die drei Gleichungen für ein Wertepaar x, y gleichzeitig verschwinden. Demnach ist:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

die Bedingung dafür, daß sich die drei Geraden in einem Punkt schneiden.

Der Inhalt eines durch drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) bestimmten Dreiecks ist:

$$J = \tfrac{1}{2}\{x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3\} .$$

Dies kann man auch schreiben:

$$J = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

Rückt (x_3, y_3) in den Koordinatenanfangspunkt, so wird:

$$2J = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} .$$

Damit haben wir die einfachste geometrische Deutung einer zweireihigen Determinante.

Läßt man einen der drei Punkte, z. B. (x_1, y_1), alle möglichen Lagen annehmen, ohne daß sich J ändert, so erhält man als Bedingung, bzw. als Gleichung des geometrischen Ortes für die Lagen aller dieser Punkte (x, y):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2J$$

oder

$$x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + x_2 y_3 - x_3 y_2 - 2J = 0$$

oder

$$y = x \cdot \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_3}(x_2 y_3 - x_3 y_2 - 2J) .$$

Dies ist aber die Gleichung einer Parallelen zu der durch (x_2, y_2) und (x_3, y_3) bestimmten Geraden. Letztere selbst erhält man, falls $J = 0$ gesetzt wird.

Drei beliebige Punkte liegen in einer Geraden, sobald das durch sie bestimmte Dreieck verschwindet; die Koordinaten der drei Punkte müssen also folgender Bedingung genügen:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Sind drei Geraden in der S. 94 angegebenen Form vorgelegt, so soll jetzt das dadurch bestimmte Dreieck seinem Inhalt nach durch die neun Konstanten dieser drei Geraden ausgedrückt werden.

Da gilt es zunächst, die Koordinaten der drei Schnittpunkte der Dreiecksseiten zu bestimmen. Die ersten beiden Gleichungen liefern x_3 und y_3:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{A''}{C''}; \qquad y_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{B''}{C''};$$

analog wird:

$$x_1 = \frac{A}{C}; \qquad y_1 = \frac{B}{C};$$

$$x_2 = \frac{A'}{C'}; \qquad y_2 = \frac{B'}{C'};$$

die Ausdrücke A, B, C, A', ... sind die Unterdeterminanten von:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

bezüglich der Elemente $a, b, c, a', \ldots$ Nun wird:

$$J = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\,C \cdot C' \cdot C''}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix},$$

wobei, wie sich der Leser durch Ausrechnung überzeugen mag, gesetzt werden kann (vgl. auch § 15):

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2,$$

so daß:

$$J = \frac{1}{2\,C C' C''} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2,$$

oder vom Vorzeichen abgesehen:

$$J = \frac{\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a'' & b'' \\ a & b \end{vmatrix}}$$

Durch drei Punkte ist ein Kreis bestimmt; man soll die Gleichung des durch die drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) gehenden Kreises aufstellen.

Die gesuchte Gleichung muß die Form haben:

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0\,.$$

Die Koordinaten jedes der drei gegebenen Punkte müssen diese Gleichung befriedigen; also müssen mit dieser Gleichung folgende drei gleichzeitig bestehen:

$$x_i^2 + y_i^2 + a\,x_i + b\,y_i + c = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Das Zusammenbestehen dieser vier Gleichungen ist nur möglich, wenn:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Dies ist die gesuchte Kreisgleichung.

Im Anschluß hieran soll die allgemeinere Aufgabe gelöst werden, die Gleichung eines durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnittes aufzustellen.

Die Gleichung eines beliebigen Kegelschnittes hat die Form:

$$a x^2 + b y^2 + c x y + d x + e y + f = 0 .$$

Dann müssen mit dieser zusammen die fünf Gleichungen bestehen:

$$a x_i^2 + b y_i^2 + c x_i y_i + d x_i + e y_i + f = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

was nur möglich ist, falls:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x y & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5 y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

und dies ist die gesuchte Gleichung.

Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes schreibt man aus Symmetriegründen gewöhnlich in folgender Form:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} + 2 a_{12} x y + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y = 0 .$$

Führt man homogene*) Koordinaten ein, d. h. ersetzt man

$$x \text{ durch } \frac{x_1}{x_3} \quad \text{und} \quad y \text{ durch } \frac{x_2}{x_3} ,$$

so lautet die obige Gleichung:

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2$$
$$+ 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 = 0 ,$$

*) Vgl. Sammluug Göschen Bd. 507, Koordinatensysteme.

was nach bekannter Schreibweise kürzer dargestellt werden kann durch:

$$\sum_{i,\,k} a_{ik} x_i x_k = 0 \quad (\text{für } i , k = 1, 2, 3 \text{ und } a_{ik} = a_{ki}) .$$

Wie nützlich diese Darstellung unter Zuhilfenahme der Determinante:

$$| a_{ik} | \quad (i , k = 1, 2, 3 , a_{ik} = a_{ki})$$

ist, kann an der allgemeinen Diskussion einer Gleichung zweiten Grades gesehen werden, wie sie in der Formelsammlung Bürklen (Nr. 51 der Sammlung Göschen, S. 160) angegeben wird.

Aus der ebenen Geometrie mag noch auf eine Aufgabe eingegangen werden, die gestattet, die Gleichung eines Kegelschnittes in Determinantenform anzugeben.

Es soll zunächst untersucht werden, unter welcher Bedingung eine Gerade Tangente an einen Kegelschnitt ist.

Zu diesem Zwecke mag irgend eine Gerade:

$$a x + b y + c = 0$$

ebenfalls in homogenen Koordinaten dargestellt werden:

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 .$$

Jede Gerade ist eindeutig bestimmt, sobald man die Größen a, b, c (ihrem Verhältnis nach) kennt. Da diese Größen eine Gerade in der Ebene bezüglich eines festen Koordinatensystems ebenso definieren, wie die Abstände eines Punktes von den Koordinatenachsen diesen selbst, so nennt man die ersteren Linienkoordinaten im Gegensatz zu den letzteren, den Punktkoordinaten. Man bezeichnet:

$$a = u_1 , \quad b = u_2 , \quad c = u_3 ,$$

und nunmehr stellt die Gleichung:

$$\sum_{i=1,2,3} u_i x_i = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

für feste Werte von u_i (oben z. B. a, b, c) alle Punkte einer Geraden dar. Dieselbe Gleichung stellt aber für bestimmte Werte von x_i alle möglichen Geraden durch den Punkt x (x_1, x_2, x_3) dar; man sagt, sie stellt diesen Punkt in Linienkoordinaten (siehe S. 98 Anm.) dar.

Zur Lösung der oben angeführten Aufgabe mag daran erinnert werden, daß die Gleichung der Polaren eines Punktes ξ (ξ_1, ξ_2, ξ_3) bezüglich des Kegelschnittes:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0$$

$$(\text{für } i, k = 1, 2, 3 \text{ und } a_{ik} = a_{ki})$$

lautet:

$$\sum_i \Big(\sum_k a_{ik}\xi_k\Big) x_i = 0 \qquad (\text{für } i, k = 1, 2, 3 \text{ und } a_{ik} = a_{ki})$$

oder die Summe ausgeführt:

$$\begin{aligned}&(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3)x_1\\ + &(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3)x_2\\ + &(a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3)x_3 = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird man natürlich sofort aufstellen können, sobald man die Linienkoordinaten der Polaren kennt. Dies besagt aber nichts anderes, als daß man die Polare auch darstellen kann durch die drei Gleichungen:

$$\varrho u_i = \sum_k a_{ik}\xi_k \qquad (i, k = 1, 2, 3 \text{ usw.}),$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist.

Diese Polare geht über in die Tangente, sobald der Punkt ξ auf den Kegelschnitt zu liegen kommt. Der Pol ξ und die Polare liegen dann vereinigt, d. h. die Koordinaten ξ müssen dann der Polarengleichung genügen:

$$\sum_i u_i \xi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Somit müssen für die drei Werte ξ_1, ξ_2, ξ_3 folgende vier Gleichungen gleichzeitig bestehen:

$$\begin{aligned}-\varrho u_1 + a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 &= 0\\ -\varrho u_2 + a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 &= 0\\ -\varrho u_3 + a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 &= 0\\ u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 &= 0,\end{aligned}$$

was nur möglich ist unter der Bedingung:

$$\text{(I)} \qquad \begin{vmatrix} u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ u_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ u_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Soll also irgend eine Gerade mit den Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3 Tangente an den Kegelschnitt:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3 \text{ und } a_{ik} = a_{ki})$$

sein, so müssen ihre Linienkoordinaten dieser Gleichung genügen. Man sagt nun, die Gleichung (I) ist die Gleichung der Kurve zweiter Klasse, wenn man unter der Kurve zweiter Klasse die Gesamtheit aller Tangenten an die Kurve zweiter Ordnung versteht.

Löst man ferner die drei Gleichungen:

$$\varrho u_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

auf nach den Größen x, so erhält man nach Früherem (S. 89f):

$$\varrho' x_i = \sum_k A_{ik} u_k \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

wo die A_{ik} die Unterdeterminanten von D sind und ϱ' ein Proportionalitätsfaktor ist.

Diese Gleichungen gestatten, zu jeder durch ihre Linienkoordinaten bestimmten Geraden u den zugehörigen Pol x zu bestimmen.

Soll nun wieder Pol und Polare vereinigt liegen (soll also die Polare zur Tangente werden), so müssen die vier Gleichungen gleichzeitig bestehen:

$$\varrho' \cdot x_i = \sum_k A_{ik} u_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

$$\sum_i x_i u_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

was nur möglich ist, wenn:

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} x_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ x_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ x_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Diese Gleichung muß also für die Punktkoordinaten eines Punktes x bestehen, dessen Pol auf der zugehörigen Polaren eines durch die a_{ik} bestimmten Kegelschnittes und damit auf diesem selbst liegt. Mit anderen Worten, dies ist in veränderter Form, in Determinantenform, die Gleichung eines Kegelschnittes in Punktkoordinaten.

Die Bedingung dafür, daß sich die vier Ebenen:

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

in einem Punkte schneiden, fällt zusammen mit dem gleichzeitigen Bestehen dieser Gleichungen; also lautet die gesuchte Bedingung:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Auch in der analytischen Geometrie des Raumes werden die Formeln übersichtlicher, sobald man homogene Punkt-, bzw. Ebenenkoordinaten einführt. Irgend eine Ebene stellt sich dann dar durch:

$$\sum_i u_i x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

sobald die vier Werte u_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ fest gegeben sind. Haben aber die x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ fest gegebene Werte, so stellt diese Gleichung die Bedingung dar, der die vier Ebenenkoordinaten u_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ genügen müssen, damit die Ebene durch den Punkt x verläuft; man sagt, es ist die Darstellung eines Punktes in Ebenenkoordinaten.

Deutet man durch einen zweiten Index bei x_i oder u_i, also durch $x_{i1}, x_{i2}, \ldots$ oder $u_{i1}, u_{i2}, \ldots$, die Koordinaten verschiedener Punkte $1, 2, \ldots$ oder verschiedener Ebenen $1, 2, \ldots$ an, so lassen sich z. B. die Gleichungen von vier Ebenen darstellen durch:

$$\sum_i u_{ik} x_i = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

und die Bedingung, daß sich diese durch die u_{ik} definierten Ebenen in einem Punkt schneiden, könnte man kurz angeben durch:

$$|u_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Die Gleichungen von vier Punkten (in Ebenenkoordinaten) würden lauten:

$$\sum_i x_{ik} u_i = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

und die Bedingung, daß die durch die x_{ik} definierten vier Punkte in einer Ebene liegen:

$$|x_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Denkt man sich in der letzten Gleichung die Elemente der ersten Zeile variabel und die anderen fest gegeben, so hat man die Gleichung einer durch drei Punkte bestimmten Ebene, wie unter ähnlicher Annahme:

$$|u_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

die Gleichung (in Ebenenkoordinaten) eines durch drei Ebenen bestimmten Punktes ist.

Auch das Tetraedervolumen gestattet unter Zuhilfenahme der Determinanten eine einfache Darstellung.

In gewöhnlichen Punktkoordinaten heißt die Gleichung einer durch drei gegebene Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ gehenden Ebene E:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Setzt man an Stelle x, y, z in dieser Determinante (D) die Koordinaten x_0, y_0, z_0 eines beliebigen Punktes P_0, so erhält man eine neue Determinante (D_0). Es ist nun D_0 proportional dem Abstand p des Punktes P_0 von E. Den Wert p selbst erhält man (nach den Sätzen über die Hessesche Normalform einer Ebene), wenn man D_0 dividiert durch die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Koeffizienten von x_0, y_0, z_0 in D_0, also durch:

$$\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2} .$$

Hierin stellen die Determinanten unter der Quadratwurzel die doppelten Projektionen des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$

auf die drei Koordinatenebenen dar, so daß die Quadratwurzel gleich dem doppelten Dreieck $P_1 P_2 P_3$ ist. Da also:

$$D_0 : 2\triangle(P_1, P_2, P_3) = p ,$$

so ist:

$$D_0 = 2 \cdot p \cdot \triangle(P_1, P_2, P_3) .$$

Das ist aber der sechsfache Inhalt (V) des durch die Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 gebildeten Tetraeders, so daß:

$$V = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

Fällt P_0 in den Koordinatenanfangspunkt, so wird (geometrische Deutung einer dreigliedrigen Determinante):

$$V = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} ,$$

was bei Einführung von Polarkoordinaten:

$$x_i = \varrho_i \cos\alpha_i , \quad y_i = \varrho_i \cos\beta_i , \quad z_i = \varrho_i \cos\gamma_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

übergeht in:

$$V = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} \varrho_1 \cos\alpha_1 & \varrho_1 \cos\beta_1 & \varrho_1 \cos\gamma_1 \\ \varrho_2 \cos\alpha_2 & \varrho_2 \cos\beta_2 & \varrho_2 \cos\gamma_2 \\ \varrho_3 \cos\alpha_3 & \varrho_3 \cos\beta_3 & \varrho_3 \cos\gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3}{6}\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} .$$

Die letzte Determinante nennt man den Sinus der von den drei Radien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 gebildeten Ecke und bezeichnet ihn mit $\sin(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$, so daß:

$$6\,V = \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 \sin(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3).$$

Hierbei ist V am größten, wenn die ϱ aufeinander senkrecht stehen; dann wird $\sin(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3) = 1$.

Im Anschluß an die letzten Formeln mag auf einen in der neuesten Zeit viel genannten Satz eingegangen werden: Schreibt man:

$$\varrho_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2},$$

so ist nach Obigem:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cdot \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2} \cdot \sin(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3),$$

oder, da $\sin(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3) < 1$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 < (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2).$$

Versteht man unter $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ die Norm der i-ten Zeile, so hat man den Satz, daß das Quadrat der obigen Determinante nie größer ist als das Normenprodukt der Zeilen.

Dieser Satz*) gilt nun aber nicht bloß für dreireihige Determinanten, sondern ganz allgemein und wurde 1893 von Hadamard aufgestellt:

$$|a_{ik}|^2 < \left(\sum_k a_{1k}^2\right)\left(\sum_k a_{2k}^2\right) \cdots \left(\sum_k a_{nk}^2\right), \quad (i, k = 1, 2 \ldots n).$$

Sind alle a ihrem absoluten Betrag nach nicht größer als eins, so ist der größte Wert, den $|a_{ik}|$ (bei komplexen

*) Den angeführten Beweis für $n = 3$ verdankt der Verfasser einer mündlichen Mitteilung des Herrn E. Jahnke.

Werten der Elemente der Modul von $|a_{ik}|$) erreichen kann, $n^{\frac{1}{2}n}$. In dieser Form findet man den Hadamardschen Satz auch oft angeführt.

Nun mögen die Flächen 2. Ordnung noch kurz Erwähnung finden.

Die allgemeine Gleichung einer solchen Fläche heißt:

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 d x y + 2 e x z + 2 f y z$$
$$+ 2 g x + 2 h y + 2 i z + k = 0$$

und in homogenen Koordinaten mit Hilfe der Summenbezeichnung:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4 \text{ und } a_{ik} = a_{ki}).$$

Deutet man wieder durch nachgestellte Indizes bei den schon vorhandenen die Koordinaten verschiedener Punkte an, so entsteht durch die Elimination der a_{ik} aus den zehn Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0 \\ &\sum_{i,k} a_{ik} x_{in} x_{kn} = 0 \qquad n = 1, 2 \ldots 9 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &i, k = 1, 2, 3, 4 \\ &\text{und } a_{ik} = a_{ki} \end{aligned}$$

die Gleichung der durch neun Punkte bestimmten Fläche zweiter Ordnung.

Bezüglich der Diskussion der Flächen zweiter Ordnung mag nur erwähnt werden, daß auch da die Determinante:

$$|a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

eine Rolle spielt.

Für die Bedingung, daß irgend eine Ebene:

$$\sum_i u_i x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Tangentialebene an die Fläche zweiter Ordnung ist:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4 \text{ und } a_{ik} = a_{ki}),$$

findet man:

$$\begin{vmatrix} u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ u_2 & a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_3 & a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_4 & a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung kann auch aufgefaßt werden als die Gesamtheit aller Tangentialebenen an die obige Fläche zweiter Ordnung, d. h. als die Gleichung der entsprechenden Fläche zweiter Klasse.

Umgekehrt drückt sich die Bedingung dafür, daß ein Punkt (x_1, x_2, x_3, x_4) Berührungspunkt bei der Fläche zweiter Klasse ist, aus durch:

$$\begin{vmatrix} x_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ x_2 & A_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_3 & A_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_4 & A_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0;$$

und dies ist zugleich die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Punktkoordinaten.

IV. Besondere Determinanten.

§ 13. Berechnung einiger spezieller Determinanten.

1. $$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Die Addition der Elemente der drei letzten Zeilen zu den entsprechenden der ersten Zeile gibt für jedes Element derselben $(a + b + c + d)$, so daß also D durch $(a + b + c + d)$ teilbar sein muß. Führt man dieselbe Addition aus, nachdem man vorher die Elemente der ersten beiden Zeilen und Kolonnen mit (-1) multipliziert hat, wodurch sich die Determinante ihrem Werte nach nicht ändern kann, so erkennt man weiterhin den Faktor $(a + b - c - d)$ in D. Ebenso läßt die Multiplikation der ersten und dritten Zeile und Kolonne mit (-1) den Faktor $(a - b + c - d)$ und die der ersten und vierten Zeile und Kolonne mit (-1) den Faktor $(a - b - c + d)$ erkennen. Da das Hauptglied $+a^4$ ist, so muß sein:

$$D = (a + b + c + d)(a + b - c - d)(a - b + c - d)(a - b - c + d)\,^{*}).$$

2. $$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix}$$

*) Hiernach kann man die Inhalte eines Dreiecks und eines Sehnenvierecks durch die Seiten in Determinantenform darstellen!

Hier sind die Zeilen die ersten fünf Zahlen der figurierten Reihen 0-ter, 1-ter, 2-ter, 3-ter, 4-ter Ordnung. Durch Verminderung jeder Zeile um die vorhergehende wird:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} .$$

Führt man dasselbe wie vorher nochmals an den letzten drei Zeilen usw. aus, so erhält man ferner:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Man sieht, daß man dieses Prinzip ganz allgemein auf eine Determinante n-ten Grades anwenden kann, deren n Elemente der i-ten Zeile und der i-ten Kolonne die n ersten Glieder der figurierten Reihe der $(i-1)$-ten Ordnung sind; diese Determinante hat immer den Wert 1. Nun hat die n-te figurierte Zahl k-ter Ordnung den Wert:

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1},$$

so daß jetzt die Determinante aus den n ersten figurierten Zahlen von 0-ter bis $(n-1)$-ter Ordnung heißt:

$$\begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix} = 1 .$$

Andere Determinanten, in denen ebenfalls die Elemente Ausdrücke von der Form $\binom{m}{n}$ sind, haben Zeipel, Stern und Studnička untersucht. (Vgl. Pascal.)

3. Wir wenden uns einer Determinante zu, die in gewissem Gegensatz zur Einheitsdeterminante (vgl. S. 49) steht:

$$D_{(5)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} .$$

Vermehrt man die Elemente der ersten Zeile um die entsprechenden aller übrigen, so kann 4 vor die Determinante als Faktor treten:

$$D_{(5)} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} .$$

Durch Verminderung der Elemente der zweiten Kolonne um die entsprechenden der dritten, ebenso durch Verminderung der Elemente der dritten um die der vierten, weiter der vierten um die der fünften und der fünften um die der ersten wird:

$$D_{(5)} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot 4 .$$

Allgemein würde sein $D_{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)$.

4. $$D = \begin{vmatrix} a_{11} + z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + z & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + z \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} + z)(a_{22} + z)(a_{33} + z) + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$$
$$- (a_{22} + z)\, a_{13} \cdot a_{31} - (a_{11} + z)\, a_{23}\, a_{32} - (a_{33} + z)\, a_{12}\, a_{21}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ z \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right\}$$
$$+ z^2 (a_{11} + a_{22} + a_{33}) + z^3 .$$

(Vgl. hierzu die Bemerkungen S. 121.)

5. $$D = \begin{vmatrix} a_{11} + z & \dots & a_{1n} + z \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} + z & \dots & a_{nn} + z \end{vmatrix} .$$

Durch Anwendung vom 10. Satz § 6 kann man D in folgende Determinanten zerlegen, falls man bedenkt, daß Determinanten mit gleichen Kolonnen verschwinden:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & z & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & z & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & z \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & z \end{vmatrix} .$$

Jede dieser Determinanten, außer der ersten, denkt man sich nach Unterdeterminanten der Elemente derjenigen Kolonnen entwickelt, in denen z steht; auf diese Weise erhält man z multipliziert mit der Summe aller möglichen $(n-1)$-gliedrigen Unterdeterminanten:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + z \sum_{ik} A_{ik} .$$

6. Einen Spezialfall von (5) stellt dar:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} + z & z & z & \dots & z \\ z & a_{22} + z & z & \dots & z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z & z & z & \dots & a_{nn} + z \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn} + z \sum_{ik}' A_{ik} .$$

Die Summe reduziert sich jetzt auf die n möglichen Produkte aus je $n-1$ der Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, so daß man bei Absonderung von $z \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$ erhält:

$$D = z \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{a_{22}} + \dots + \frac{1}{a_{nn}} \right) .$$

7. Beispiel für Anwendung von Rekursionsformeln:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & a & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & a & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Durch Entwicklung nach Unterdeterminanten der ersten Kolonne wird:

$$D_n = a \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & . & . & . \\ 1 & a & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 1 & a & 1 & . & . & . \\ 0 & 1 & a & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a \end{vmatrix}.$$

Die erste Determinante ist dieselbe wie D_n, nur hat sie eine Zeile und Kolonne weniger, sie sei D_{n-1}; die zweite reduziert sich auf die Unterdeterminante des ersten Elementes der ersten Zeile, welche dann wieder dieselbe Determinante wie D_n ist, nur daß sie zwei Zeilen und Kolonnen weniger hat, sie sei D_{n-2}. Dann ist $D_n = a D_{n-1} - D_{n-2}$. Da aber $D_1 = a$ und $D_2 = a^2 - 1$, so ist jedes beliebige D angebbar.

Für $a = 1$ nimmt die Determinante die Werte 0, $+1$ oder -1 an und zwar:

$$D_{2+3k} = 0$$

für beliebige k und:

$$D_{2+3k+1} = D_{2+3k+2} = +1 \text{ oder } -1,$$

je nachdem k ungerade oder gerade ist.

§ 14. **Vandermondesche Determinante.**

Besondere Erwähnung verdient die folgende Determinante, auch Potenzdeterminante genannt, da sie für die ganze Entwicklung der Determinantentheorie von Wichtigkeit ist. Vandermonde und Cauchy haben sie besonders untersucht.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Addiert man die mit -1 multiplizierten Elemente der zweiten Zeile zu den entsprechenden der ersten, so sieht man, daß D den Faktor $(a_1 - a_2)$ haben muß. Dasselbe kann man mit allen möglichen Paaren $\left(\text{ihre Anzahl ist } \frac{n}{2}(n-1)\right)$ von je zwei Zeilen tun, so daß man $\frac{n}{2}(n-1)$ Faktoren $(a_i - a_k)$ vor die Determinante setzen kann. D kann sich von dem Produkt dieser Faktoren nur um einen Zahlenfaktor k unterscheiden, denn aus der Determinante selbst sieht man, daß jedes einzelne Glied der Entwicklung von der Dimension $\frac{n}{2}(n-1)$ sein muß. Dann ist also:

$$\begin{aligned} D = k \cdot (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4) \dots (a_1 - a_n) \\ (a_2 - a_3)(a_2 - a_4) \dots (a_2 - a_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_{n-1} - a_n). \end{aligned}$$

Hiernach ist k der Koeffizient von

$$a_1^{n-1}\, a_2^{n-2} \dots a_{n-1}.$$

In der entwickelten Determinante ist dieses Produkt das der Nebendiagonalglieder, also mit dem Vorzeichen von $(-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}$ versehen; somit ist:

$$k = (-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}.$$

Kehrt man jede einzelne Differenz um, so kann geschrieben werden:

$$D = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1)\ldots(a_n - a_{n-1}).$$

Dieses Differenzenprodukt schreibt man auch:

$$D = \Pi(a_i - a_j) \quad \text{(für alle } i > j \text{ von 1 bis } n).$$

Die Vandermondesche Determinante ist wichtig geworden für die Untersuchungen über alternierende Funktionen, womit Cauchy solche bezeichnet hat, die bei beliebiger Permutation der Elemente entweder unverändert bleiben oder den entgegengesetzten Wert annehmen. Die einfachste alternierende Funktion ist das obige Differenzenprodukt.

Cauchy hat gezeigt, daß jede ganze alternierende Funktion von irgendwelchen Elementen das Differenzenprodukt derselben Elemente als Faktor aufweist. Man erkennt dies daraus, daß durch die gegenseitige Vertauschung irgend zweier Elemente die Funktion den entgegengesetzten Wert annimmt, daß sie also verschwindet, falls die beiden betreffenden Elemente einander gleich sind. Hieraus schließt man, daß die Funktion durch die Differenz der beiden Elemente, also weiterhin durch das Produkt aller Differenzen teilbar ist. Dividiert man eine solche ganze alternierende Funktion durch das Differenzenprodukt der Elemente, so ergibt sich entweder eine von den Elementen unabhängige Zahl, oder eine symmetrische Funktion der Elemente, welche die Eigenschaft hat, daß sie bei jeder beliebigen Vertauschung der Elemente ungeändert bleibt.

Es muß noch hervorgehoben werden, daß aus den bekannten Eigenschaften der Determinanten, als welche das Differenzenprodukt geschrieben werden kann, ähnliche Eigenschaften für dieses Differenzenprodukt folgen. Umgekehrt

hat man, besonders Cauchy, die Determinanten aus dem Differenzenprodukt hergeleitet und die Eigenschaften des letzteren auf die Determinanten übertragen. Zu diesem Zweck schreibt man die obige Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ a_2^0 & a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^0 & a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

oder indem man statt der unteren Indizes: 1, 2, 3, ..., n die folgenden nimmt: 0, 1, 2, ..., $n-1$:

$$\begin{vmatrix} a_0^0 & a_0^1 & a_0^2 & \ldots & a_0^{n-1} \\ a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}^0 & a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

In dieser Form hat man noch das Differenzenprodukt vor sich; sieht man aber die Exponenten (vgl. die Schlußbemerkung S. 22 unten) als Indizes an, so hat man sofort die allgemeine Form der Determinante.

Jacobi meint jedoch, daß es richtiger wäre, die Entwicklung des Differenzenproduktes dadurch zu erklären, daß es sich wie eine Determinante verhält.

§ 15. Reziproke Determinanten.

Ist ein System von n^2 Größen gegeben:

$$\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}, \end{matrix}$$

so kann man ihm ein anderes zuordnen, indem man von

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

die $(n-1)$-gliedrigen Unterdeterminanten bestimmt und diese zu folgendem System anordnet:

$$\begin{matrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn}. \end{matrix}$$

Die Determinante dieses Systems, also die Determinante der Unterdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung, nennt man die reziproke Determinante von D. Solche Determinanten spezieller Art hatten schon Lagrange und Gauß untersucht; die allgemeinen Untersuchungen rühren von Cauchy und Jacobi her. Ist:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

so lautet das Element der i-ten Zeile und k-ten Kolonne der Produktdeterminante $D \cdot \Delta$:

$$c_{ik} = a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \dots + a_{in} A_{kn}.$$

Nach den Betrachtungen S. 51 ist c_{ik} gleich Null oder D, je nachdem $i \neq k$ oder $i = k$. Hiernach wird:

$$D \cdot \Delta = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 & \dots \\ 0 & D & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D \end{vmatrix},$$

also (Cauchy):

$$\Delta = D^{n-1}.$$

Um die reziproke Determinante $\mathsf{A}_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}}$ zu $A_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}}$, also zu einer allgemeinen Unterdeterminante von D zu bestimmen, verfahren wir folgendermaßen:

Zeilen und Kolonnen von D mögen so umgestellt werden, daß die α_1-te, α_2-te, ..., α_m-te Zeile die m letzten Zeilen und daß die β_1-te, β_2-te, ..., β_m-te Kolonne die m letzten Kolonnen bilden ($\Sigma\alpha + \Sigma\beta$ Zeichenwechsel!); die übrigen Zeilen und Kolonnen behalten ihre Reihenfolge zueinander bei. Mit dieser so veränderten Determinante multipliziert man die reziproke Determinante $\mathsf{A}_{\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{smallmatrix}\right\}}$, jedoch auf den n-ten Grad erweitert:

$$\begin{vmatrix} X_{m+1,1} & \dots & X_{m+1,n-m} & X & \dots & X \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{n1} & \dots & X_{n,n-m} & X & \dots & X \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

wobei die $n-m$ ersten Zeilen diejenigen von Δ sind, falls Δ ebenso umgestellt würde wie oben D; alle übrigen Elemente mit Ausnahme derjenigen der Hauptdiagonale, die gleich eins sein sollen, mögen verschwinden.

Führt man die angedeutete Multiplikation nach Zeilen aus, so bekommt man:

$$\begin{vmatrix} D & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & D & 0 & \dots & 0 \\ x & & \dots & x & a_{\alpha_1\beta_1} & \dots & a_{\alpha_1\beta_m} \\ x & & \dots & x & a_{\alpha_2\beta_1} & \dots & a_{\alpha_2\beta_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & & \dots & x & a_{\alpha_m\beta_1} & \dots & a_{\alpha_m\beta_m} \end{vmatrix}.$$

Hierin sind die Größen x die übrigen Größen a aus der α_1-ten, α_2-ten, ..., α_m-ten Zeile der oben umgestellten Determinante D, außerdem die entsprechenden zu den obigen X, allerdings Zeilen und Kolonnen vertauscht.

Man erhält also:

$$(-1)^{\Sigma\alpha+\Sigma\beta} \cdot D \cdot \mathsf{A}_{\left\{\begin{matrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{matrix}\right\}} = D^{n-m} \cdot a_{\left\{\begin{matrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{matrix}\right\}}$$

oder:

$$\mathsf{A}_{\left\{\begin{matrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{matrix}\right\}} = D^{n-m-1}(-1)^{\Sigma\alpha+\Sigma\beta}\, a_{\left\{\begin{matrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_m & \beta_m\end{matrix}\right\}} \cdot$$

Hierin ist a das Komplement zu A in D, oder wenn wir es mit dem angegebenen Vorzeichen versehen, das algebraische Komplement; man kann also sagen (Jacobi):

Hat man eine (von Null verschiedene!) Determinante D, deren reziproke Δ ist, und ist A eine Unterdeterminante p-ter Ordnung von D und A die entsprechende von Δ, so unterscheidet sich A von dem algebraischen Komplement von A innerhalb D nur um den Faktor D^{p-1}.

Beispiele:

a) Es ist der Koeffizient von A_{ik} in Δ:

$$(-1)^{i+k} D^{n-2} a_{ik} .$$

b) Sind die Elemente in D voneinander unabhängige Variable, so ist:

$$\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{is} \\ A_{rk} & A_{rs} \end{vmatrix} = D \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial a_{ik}\,\partial a_{rs}}$$

oder:

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ik}} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{rs}} - \frac{\partial D}{\partial a_{rk}} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{is}} = D \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial a_{ik}\,\partial a_{rs}} .$$

c)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{15} \\ a_{51} & \dots & a_{55} \end{vmatrix}; \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{15} \\ A_{51} & \dots & A_{55} \end{vmatrix};$$

$$\mathsf{A}_{\left\{\begin{matrix}12 \\ 24 \\ 35\end{matrix}\right\}} = \begin{vmatrix} A_{41} & A_{43} \\ A_{51} & A_{53} \end{vmatrix}$$

$$= -D \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ u_{32} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix} .$$

§ 16. Symmetrische, schiefsymmetrische und pseudosymmetrische Determinanten.

Unter symmetrischen Determinanten versteht man solche, bei denen konjugierte Elemente einander gleich sind, bei denen also $a_{ik} = a_{ki}$. Derartige Determinanten hatten wir bereits bei der Diskussion der Kurven und Flächen zweiter Ordnung (vgl. S. 99 u. S. 101) erwähnt. Ferner sind die im vorvorigen Paragraphen unter den Nummern 1, 2, 3, 6, 7 erwähnten Determinanten symmetrisch.

Wir setzen jetzt auch voraus, daß die in § 13 unter 4 angeführte Determinante solche Elemente a hat, daß $a_{ik} = a_{ki}$. Setzt man dann $D = 0$, so hat man eine kubische Gleichung in z, die bei dem Problem der Hauptachsen der Flächen zweiter Ordnung eine Rolle spielt; sie hat nur reelle Lösungen. Cauchy hat das Entsprechende auch bei derartigen Determinanten höherer Ordnung nachgewiesen, ein Fall, der bei der Berechnung der säkularen Störungen der Planeten eintritt. Man nennt dann $D = 0$ die Säkulargleichung.

Nach dem Multiplikationstheorem ist ferner das Quadrat jeder Determinante eine symmetrische Determinante; Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{vmatrix}.$$

Jede Hauptunterdeterminante einer symmetrischen Determinante ist selbst wieder symmetrisch, und zwei konjugierte Unterdeterminanten einer solchen sind einander gleich. Daraus folgt wieder, daß die reziproke Determinante einer symmetrischen Determinante selbst wieder symmetrisch ist.

Hat die symmetrische Determinante die besondere Eigenschaft, daß für beliebige q ihrer Elemente ist:

$$a_{ik} = a_{i \pm q,\, k \pm q}$$

oder:

$$a_{ik} = a_{i \pm q,\, k \mp q}\,,$$

so nannte sie Hankel orthosymmetrisch, Sylvester persymmetrisch, Frobenius rekurrierend.

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} b & a & 0 & d \\ a & 0 & d & a \\ 0 & d & a & 1 \\ d & a & 1 & c \end{vmatrix}.$$

Sind die eben genannten Determinanten so beschaffen, daß alle Zeilen dieselben Elemente aufweisen und zwar derart, daß jede Zeile durch eine zyklische Vertauschung der Elemente aus der vorhergehenden entsteht, so hat

man die zyklischen Determinanten oder Zirkulanten; man findet auch die Bezeichnung doppelt-orthosymmetrische Determinanten. Sie spielen bei gewissen Fragen der Zahlentheorie eine Rolle.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Zur Übung zeige man, daß das Produkt zweier zyklischen Determinanten vom Vorzeichen abgesehen wieder eine zyklische Determinante ist, indem man bilde aus:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_1 \\ b_3 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

das Produkt $A \cdot (-B)$, wo:

$$-B = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Sind in einer Determinante die konjugierten Elemente entgegengesetzt gleich, also:

$$a_{ik} = -a_{ki}$$

und dementsprechend:

$$a_{11} = a_{22} = a_{ii} = a_{kk} = \dots = a_{nn} = 0\,,$$

so nennt man die Determinante schiefsymmetrisch, halbsymmetrisch, hemisymmetrisch. Man findet

auch die Bezeichnung überschlagene oder symmetrale Determinanten mit verschwindenden Hauptdiagonalelementen.

Bei der Lösung des sogenannten Pfaffschen Problems (Literatur hierüber siehe Pascal) spielen gewisse Ausdrücke eine Rolle, deren Quadrate halbsymmetrische Determinanten gerader Ordnung sind. Diese Ausdrücke bezeichnet man als Pfaffians oder Halbdeterminanten.

Eine schiefsymmetrische Determinante von ungerader Ordnung ist Null, eine solche von gerader Ordnung ein Quadrat.

Denn multipliziert man alle Kolonnen einer $(2m+1)$-gliedrigen schiefsymmetrischen Determinante D bezüglich aller Elemente mit (-1), so erreicht man nur eine Vertauschung der Zeilen mit den Kolonnen; andrerseits müßte aber die Determinante ihr Vorzeichen geändert haben. Es müßte also sein $D = -D$, was nur für $D = 0$ möglich ist.

Der Beweis des zweiten Teiles mag nur angedeutet werden; die § 15 Beispiel b) gegebene Formel reduziert sich unter den jetzigen Bedingungen einer schiefsymmetrischen Determinante für $i = k$ und $r = s$ auf:

$$\left(\frac{\partial D}{\partial a_{ir}}\right)^2 = D \frac{\partial^2 D}{\partial a_{ii}\, \partial a_{rr}}.$$

Hiernach ist D ein Quadrat, sobald jede ihrer Hauptunterdeterminanten von einem um zwei Einheiten niederen Grad ein solches ist. Da aber jede zweigliedrige schiefsymmetrische Determinante ein Quadrat ist, muß jede geradgliedrige schiefsymmetrische Determinante ein Quadrat sein.

Beispiele:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & f \\ d & e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a \begin{vmatrix} -a & -b & -d \\ c & 0 & f \\ e & -f & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} -a & -b & -d \\ 0 & -c & -e \\ e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$- d \begin{vmatrix} -a & -b & -d \\ 0 & -c & -e \\ c & 0 & f \end{vmatrix} = (af + be - cd)^2.$$

Pseudosymmetrische oder schiefe Determinanten hat man vor sich, sobald die Hauptelemente nicht verschwinden, alle konjugierten Elemente aber entgegengesetzt gleich sind.

Es mag nur auf den Spezialfall näher eingegangen werden, daß alle Hauptelemente untereinander gleich sind. Nach einem früheren Beispiel § 13 (4) läßt sich

$$D = \begin{vmatrix} z & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & z & -a_{23} & \dots & \dots \\ a_{13} & a_{23} & z & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & \dots & \dots & z \end{vmatrix}$$

nach Potenzen von z entwickeln. In dieser Entwicklung müssen das von z freie Glied und alle Unterdeterminanten schiefsymmetrische Determinanten sein ($a_{11} = \dots = a_{nn} = 0$). Folglich müssen alle von un-

gerader Ordnung verschwinden und diejenigen gerader Ordnung Quadrate sein.

Ist also D von gerader Ordnung, so bleiben nur Glieder mit geraden Potenzen von z übrig, jede Potenz mit einer Summe von Quadraten multipliziert, so daß also D in eine Summe von Quadraten zerlegbar ist.

Ist D von ungerader Ordnung, so läßt sich z aus der ganzen Entwicklung ausklammern, und es bleibt wieder eine Summe von Quadraten zurück, so daß sich also D ebenfalls in eine Summe von Quadraten zerlegen läßt, falls $z = 1$ ist.

Eine besondere Gruppe der pseudosymmetrischen Determinanten sind die Kontinuanten; die Hauptdiagonale enthält hier beliebige Elemente, alle andern verschwinden, mit Ausnahme der beiden zur Hauptdiagonale parallelen und benachbarten schiefen Reihen, welche auf der einen Seite nur Elemente vom Wert 1, auf der andern vom Wert -1 enthalten:

$$D = (a_1 a_2 \ldots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

Benutzt man die angegebene Abkürzung, so gibt die Entwicklung nach Unterdeterminanten die Rekursionsformel:

$$(a_1 a_2 \ldots a_n) = a_1(a_2 \ldots a_n) + (a_3 \ldots a_n)$$

oder

$$= a_n(a_1 \ldots a_{n-1}) + (a_1 \ldots a_{n-2}),$$

wonach das Bildungsgesetz sich erkennen läßt.

Die Kontinuanten haben diesen Namen wegen ihrer Beziehungen zur Theorie der Kettenbrüche.

§ 17. Funktionaldeterminanten.

In der Einleitung wurde gezeigt, wie Jacobi durch seine Abhandlung „Über die Bildung und Eigenschaften der Determinanten“ dazu beigetragen hatte, daß die Determinanten zu einem unentbehrlichen Werkzeug der Mathematiker wurden. Jener Abhandlung ließ Jacobi unmittelbar eine andere folgen: „Über die Funktionaldeterminanten“*), worin er, über die erste Abhandlung hinausgehend, eine selbständige, neue Theorie aufbaut. Im folgenden mag kurz auf diese Theorie eingegangen werden, da es sich dabei, wie Stäckel sagt, um eine Anwendung der Determinanten von solcher Fruchtbarkeit handelt, daß es wohl kein Gebiet der höheren Analysis gibt, auf dem man der „Jacobischen Determinante“ nicht begegnet.

Sind n Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ vorgelegt, von denen jede die n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aufweist.

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(x_1 x_2 \ldots x_n) \\ f_2 &= f_2(x_1 x_2 \ldots x_n) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n &= f_n(x_1 x_2 \ldots x_n), \end{aligned}$$

so kann man jede Funktion partiell nach den einzelnen Variablen differentiieren:

$$\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{matrix}$$

*) Ostwalds Klassiker Nr. 78.

Die Determinante dieses Systems von n^2 partiellen Differentialquotienten nennt Jacobi die

Funktionaldeterminante,

oder genauer die Determinante, die zu den Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gehört, oder die in bezug auf die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gebildete Determinante der Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Analog seiner früheren Bezeichnungsweise einer Determinante schreibt sie Jacobi:

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Nach Kronecker könnte man schreiben:

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right| \qquad (\text{für } i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Cauchy nannte sie analog seiner Bezeichnungsweise der Determinanten „fonctions différentielles alternées“.

Sylvester nannte sie zu Ehren Jacobis „Jacobians“ und schrieb dafür:

$$J(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Dann findet man noch die Schreibweisen:

$$f_x \text{ oder } \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \text{ oder schließlich } \frac{\partial(f_1 \ldots f_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)}.$$

Die letzte Schreibweise rührt von Donkin her; er wollte durch sie andeuten, daß die Sätze über Funktionaldeterminanten eine auffallende Ähnlichkeit mit bekannten Differentialformeln zeigen und sich als deren Erweiterung betrachten lassen.

Ist im besonderen:

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (\text{für } i = 1, 2, \ldots, n),$$

so nennt man die Funktionaldeterminante die „Hessesche Determinante“ und bezeichnet sie mit:

$$H(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Man erkennt z. B. $H(F)$ sofort als symmetrische Determinante der zweiten partiellen Differentialquotienten.

Ist F eine ganze homogene Funktion zweiten Grades der n Variablen $x_1, \ldots, x_n$, so sind die n Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ linear, und die mit (-1) multiplizierte Funktionaldeterminante wird die „Determinante der Form“ genannt.

Für

$$f_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

geht die Funktionaldeterminante über in die Determinante:

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die Sätze, die also für Funktionaldeterminanten gelten werden im besonderen auch für die gewöhnlichen Determinanten Geltung haben.

Der Grad einer Funktionaldeterminante wird sich verringern, sobald mehrere der gegebenen Funktionen einzelnen Variabeln gleich sind. So hat z. B. für:

$$f_1 = f_1(x_1 \dots x_n), \dots, f_m = f_m(x_1 \dots x_n),$$
$$f_{m+1} = x_{m+1}, f_{m+2} = x_{m+2}, \dots, f_n = x_n$$

die Funktionaldeterminante den Wert:

$$J = \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_m}{\partial x_m}.$$

Im besonderen hat die Funktionaldeterminante den Wert 1, wenn:

$$f_1 = x_1, f_2 = x_2, \dots, f_n = x_n.$$

Der Fundamentalsatz über Funktionaldeterminanten ist folgender:

Die Funktionaldeterminante der n Funktionen $f_1, \dots, f_n$ der Variablen $x_1, \dots, x_n$ verschwindet, sobald die Funktionen f voneinander abhängig sind, sobald also eine Bedingung:

$$F = F(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0$$

existiert.

Der Satz ergibt sich ohne weiteres daraus, daß folgende n Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial F}{\partial f_n} \frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 0$$
$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

gleichzeitig für die n Größen $\frac{\partial F}{\partial f_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ bestehen müssen; abgesehen von dem Fall, daß alle $\frac{\partial F}{\partial f_i}$ verschwinden, was gegen die Voraussetzung ist, kann das gleichzeitige Bestehen (vgl. S. 85) nur stattfinden, wenn die Determinante der Koeffizienten der $\frac{\partial F}{\partial f_i}$, also die Funktionaldeterminante der f verschwindet.

Sind die Funktionen f solche der Variablen y, die selbst wieder Funktionen der unabhängigen Variablen x sind, so kann man von jedem f die Ableitung nach jedem x, also im ganzen n^2 bilden:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_k}$$
$$(i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Die Funktionaldeterminante aus den Elementen $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ ist dann eine Produktdeterminante:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Falls nur eine Funktion f von y vorliegt, wobei $y = y(x)$, so entspricht dies dem bekannten Satz in der Differentialrechnung:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Vgl. das obige Ergebnis in der Schreibweise:

$$\frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} = \frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(y_1 \dots y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1 \dots y_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}.$$

Schreibt man diese letzte Formel:

$$\frac{\partial(f_1 \ldots f_n)}{\partial(y_1 \ldots y_n)} = \frac{\partial(f_1 \ldots f_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)} : \frac{\partial(y_1 \ldots y_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)},$$

so hat man das Analogon zu der bekannten Formel:

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{dx} : \frac{dy}{dx}.$$

Ist im speziellen in den letzten Formeln das System der f identisch mit dem der y, so ergibt sich:

$$\frac{\partial(f_1 \ldots f_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)} = 1,$$

und die obige Formel besagt jetzt:

Die Funktionaldeterminante der y nach den x ist gleich dem reziproken Wert der Funktionaldeterminante der x nach den y.

Es ist dieser Satz das Analogon zu dem selbstverständlichen Satz:

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}.$$

Zum Schluß mag noch ein Satz, allerdings ohne Beweis, angeführt werden, der die Wichtigkeit der Funktionaldeterminanten nach einer Seite hin erkennen läßt:

Hat man das vielfache Integral:

$$J = \int\int \ldots \int f(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

bezüglich der Veränderlichen x zu verwandeln in ein solches mit den Veränderlichen y, die mit den x durch folgende Gleichungen zusammenhängen:

$$x_i = \varphi_i(y_1 \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2 \ldots n),$$

so hat man zu setzen:

$$J = \int\int \ldots \int f(\varphi_1 \ldots \varphi_n) \frac{\partial(\varphi_1 \ldots \varphi_n)}{\partial(y_1 \ldots y_n)} dy_1 \ldots dy_n$$
$$= \int\int \ldots \int F(y_1 \ldots y_n) \frac{\partial(x_1 \ldots x_n)}{\partial(y_1 \ldots y_n)} dy_1 \ldots dy_n,$$

wo $F(y_1 \ldots y_n) = f(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$.

Man versuche hiernach $\int\int f(xy)\, dx\, dy$ in Polarkoordinaten auszudrücken.

Namenverzeichnis.

Sachverzeichnis.